Le but est d'étudier l'ensemble des fonctions f définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et qui vérifient l'équation fonctionnelle :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y) = f(x) + f(y) \quad (\heartsuit)$$

1. Vérifier que les fonctions linéaires vérifient la relation ($\heartsuit$).

   Le but de ce qui suit est de démontrer que, sous certaines hypothèses, les fonctions linéaires sont les seules qui vérifient ($\heartsuit$).

2. **Cas f dérivable.** Dans cette question, on suppose que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifie ($\heartsuit$). On fixe $y \in \mathbb{R}$ et on pose :
$$g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x+y) - f(x) \end{array}$$
   (a) Démontrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = 0$.
   (b) En déduire qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $y \in \mathbb{R}$, $f'(y) = a$.
   (c) Démontrer que f est une fonction linéaire.

3. **Cas f continue.** Dans cette question, on suppose que f est continue sur $\mathbb{R}$ et vérifie ($\heartsuit$).
   (a) Démontrer que $f(0) = 0$.
   (b) On pose $a = f(1)$. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(n) = an$.
   (c) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $f(n) = an$.
   (d) Démontrer que pour tout $r \in \mathbb{Q}$, $f(r) = ar$.
   (e) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = ax$.

4. **Cas f croissante.** Dans cette question, on suppose que f est croissante sur $\mathbb{R}$ et vérifie ($\heartsuit$). Soit $x \in \mathbb{R}$.
   (a) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$ et $v_n = \dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor + 1}{10^n}$.
      i. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lfloor 10^{n+1} x \rfloor - 10 \lfloor 10^n x \rfloor \in [\![0, 9]\!]$.
      ii. En déduire que (u_n) est croissante et que (v_n) est décroissante.
      iii. Démontrer que (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
      iv. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq x \leq v_n$.
      v. En déduire que (u_n) et (v_n) convergent vers x.
   (b) On note $a = f(1)$. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $au_n \leq f(x) \leq av_n$.
   (c) En déduire que f est linéaire.
   (d) Conclure en faisant la synthèse.

5. **Cas où f est un morphisme de $(\mathbb{R}^*, \times)$ vers $(\mathbb{R}^*, \times)$.** Dans cette question, on suppose que f vérifie ($\heartsuit$) et que pour tous $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(xy) = f(x)f(y)$.
   (a) Quelles sont les valeurs possibles pour $f(1)$?
   (b) Démontrer que pour tout $x \geq 0$, on a $f(x) \geq 0$.
   (c) En déduire que f est croissante sur $\mathbb{R}$.
   (d) Conclure.

6. **Cas f bornée.** Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ et $M \in \mathbb{R}_+$. Dans cette question, on suppose que f est bornée sur l'intervalle $[a,b]$, c'est-à-dire que pour tout $x \in [a,b]$, $|f(x)| \leq M$ et que f vérifie ($\heartsuit$).
   (a) Démontrer que f est également bornée sur $[0, b-a]$.

(b) On note $d = b - a$ et $c = \dfrac{f(d)}{d}$ et on définit sur $\mathbb{R}$ la fonction $g : x \mapsto f(x) - cx$.

i. Démontrer que g vérifie (♥).

ii. Démontrer que g est d-périodique.

iii. Justifier que g est bornée sur $[0, d]$, en déduire que g est bornée sur $\mathbb{R}$.

iv. Démontrer que g est la fonction nulle, on pourra raisonner par l'absurde en supposant qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $g(x_0) \neq 0$ et démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g(nx_0) = ng(x_0)$.

(c) Démontrer que f est linéaire.

7. **Cas où f respecte l'inverse.** Dans cette question, on suppose que f vérifie (♥) et que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{f(x)}$$

(a) On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}^*$ par $\varphi : x \mapsto x + \dfrac{1}{x}$. Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $|\varphi(x)| \geq 2$.

(b) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $|f(\varphi(x))| = |\varphi(f(x))| \geq 2$.

(c) Démontrer que pour tout $y \in \mathbb{R}$ tel que $|y| \geq 2$, on a : $|f(y)| \geq 2$.

(d) En déduire que f est bornée sur $\left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$.

(e) Conclure.

8. **Cas où f est continue en un point.** On suppose que f vérifie (♥) et est continue en $x_0 \in \mathbb{R}$ fixé. Démontrer que f est linéaire.

Si l'on suppose uniquement que f est définie sur $\mathbb{R}$ et vérifie (♥), il est possible de trouver des fonctions solutions qui ne sont pas linéaires. Toutefois les exhiber nécessite des outils avancés en algèbre et en analyse et nous n'avons pas les moyens de faire cette étude.