

1-Donner les solutions à valeurs dans $\mathbb{R}$ et définies sur $\mathbb{R}$ de :

$$\begin{cases} 3y'' - 4y' + y = 1 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

2-Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $(E) : y'' + 4xy' + (3 + 4x^2)y = 0$. On posera $z : x \mapsto y(x)e^{x^2}$.

3-Trouver les solutions de : $y^{(3)} - 6y'' + 11y' - 6y = x$.

1-Donner les solutions à valeurs dans $\mathbb{R}$ et définies sur $\mathbb{R}$ de :

$$\begin{cases} 3y'' - 4y' + y = 1 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Réponse : D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, ce problème admet une unique solution. La fonction constante égale à 1, définie sur $\mathbb{R}$, convient : c'est donc la seule solution de ce problème.

2-Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $(E) : y'' + 4xy' + (3 + 4x^2)y = 0$. On posera $z : x \mapsto y(x)e^{x^2}$.

Réponse : Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $y(x) = z(x)e^{-x^2}$. Supposons que y est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, dans ce cas z est également deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$y' : x \mapsto e^{-x^2}(z'(x) - 2xz(x))$$

$$y'' : x \mapsto e^{-x^2}(z''(x) - 4xz'(x) + (4x^2 - 2)z(x))$$

On remplace dans l'équation :

y solution de (E)

$\Leftrightarrow$

$$\forall x \in \mathbb{R}, y''(x) + 4xy'(x) + (3 + 4x^2)y(x) = 0$$

$\Leftrightarrow$

$$\forall x \in \mathbb{R}, e^{-x^2}(z''(x) + z(x)) = 0$$

$\Leftrightarrow$

$$\forall x \in \mathbb{R}, z''(x) + z(x) = 0$$

On en déduit que $z : x \mapsto k_1 \cos(x) + k_2 \sin(x)$ et
 $y : x \mapsto (k_1 \cos(x) + k_2 \sin(x))e^{-x^2}$ définies sur $\mathbb{R}$ avec $(k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2$.

3-Trouver les solutions de $(E) : y^{(3)} - 6y'' + 11y' - 6y = x$.

Réponse : L'équation caractéristique s'écrit :

$R(X) = X^3 - 6X^2 + 11X - 6 = (X - 1)(X - 2)(X - 3) = 0$, il y a trois solutions réelles : 1, 2 et 3. Les solutions de l'équation homogène sont les fonctions :

$$x \mapsto Ae^x + Be^{2x} + Ce^{3x} \text{ où } (A, B, C) \in \mathbb{R}^3$$

On cherche une solution particulière sous la forme $y_0 : x \mapsto \alpha x + \beta$ car le second membre est de la forme $P(x)e^{mx}$ avec $m = 0$ et $R(0) \neq 0$. On trouve $\alpha = -\frac{1}{6}$ et $\beta = -\frac{11}{36}$. Finalement les solutions de (E) définies sur $\mathbb{R}$ sont de la forme :

$$x \mapsto Ae^x + Be^{2x} + Ce^{3x} - \frac{1}{6}x - \frac{11}{36} \text{ où } (A, B, C) \in \mathbb{R}^3$$