1-Étudier la continuité en tout point de $\mathbb{R}$ de f définie par $f(x) = \sin(x)$ si $x \leq 0$ et $f(x) = \mathrm{sh}(x)$ si $x > 0$.

2-Soient f et g deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. On suppose que $f(a) > g(a)$, montrer que $f > g$ au voisinage de a.

3-Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \left| x \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) \right|$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.
Démontrer que f et $\mathbb{1}_{\{0\}}$ ont des limites à droite en 0 mais que $\mathbb{1}_{\{0\}} \circ f$ n'a pas de limite à droite en 0.

1-Étudier la continuité en tout point de $\mathbb{R}$ de f définie par $f(x) = \sin(x)$ si $x \leq 0$ et $f(x) = \mathrm{sh}(x)$ si $x > 0$.

Réponse : La fonction sin est continue sur $\mathbb{R}_-^*$ et la fonction sh est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, ainsi f est continue en tout point de $\mathbb{R}^*$. Étudions la continuité en 0 :

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \sin(x) = 0 = f(0)$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \mathrm{sh}(x) = 0 = f(0)$$

Ce qui démontre que f est continue à gauche et à droite en 0, donc elle est continue en 0. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

2-Soient f et g deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. On suppose que $f(a) > g(a)$, montrer que $f > g$ au voisinage de a.

Réponse : Par définition de la continuité, on a $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ et $\lim\limits_{x \to a} g(x) = g(a)$, ainsi :

$$\lim_{x \to a} (f(x) - g(x)) = f(a) - g(a) > 0$$

D'après la proposition du cours (I-3), on en déduit qu'il existe un voisinage de a sur lequel $f - g > 0$. C'est le résultat voulu.

3-Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \left|x \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)\right|$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.
Démontrer que f et $\mathbb{1}_{\{0\}}$ ont des limites à droite en 0 mais que $\mathbb{1}_{\{0\}} \circ f$ n'a pas de limite à droite en 0.

Réponse : • Pour $x > 0$, on a : $|f(x)| \leq |x|$ donc $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$: f a une limite à droite en 0.

• D'après le cours : $\lim\limits_{x\to 0^+} \mathbb{1}_{\{0\}}(x) = 0$ puisque cette fonction est constante égale à 0 sur $\mathbb{R}_+^*$.

Ces deux fonctions admettent des limites à droite en 0, on peut expliciter la composée :

$$\begin{array}{rcccl} \mathbb{1}_{\{0\}} \circ f & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \text{ ou } x = \dfrac{1}{k} \text{ avec } k \in \mathbb{Z}^* \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$

La suite $u_n = \dfrac{2}{n}$ définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ tend vers 0 par valeurs supérieures et :

$$\mathbb{1}_{\{0\}} \circ f(u_n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases} \quad \text{qui diverge}$$

$\mathbb{1}_{\{0\}} \circ f$ n'a pas de limite en 0^+.