2. Quelle transformation du plan a pour représentation complexe $f(z) = iz$?

3. Caractériser l'application $s(z) = 2iz + 1 - 2i$.

4-Donner la représentation complexe de la similitude directe de centre $\Omega(-1)$, de rapport 3 et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

5. Représenter dans le plan complexe l'ensemble suivant :

$$\left\{M(z),\ \arg\left(\frac{i-z}{2-z}\right) = \frac{\pi}{2}\ [\pi]\right\}$$

6-Pour $n \in \mathbb{N}^*$, trouver tous les nombres complexes z tels que :

$$(\sqrt{3} + 3i)z^n = -6$$

7-On définit le sinus d'un nombre complexe de la façon suivante :

$$\forall z \in \mathbb{C},\ \sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

Résoudre l'équation $\sin(z) = 2$.

1. La symétrie de centre O, l'origine du repère, est-elle une homothétie ? Donner sa représentation complexe.

Réponse : Cette symétrie centrale a pour représentation complexe $f(z) = -z$. C'est également l'homothétie de centre l'origine du repère et de rapport -1.

2. Quelle transformation du plan a pour représentation complexe $f(z) = iz$?

Réponse : On peut écrire $f(z) = e^{i\frac{\pi}{2}}(z-0)+0$, sous cette forme là, on reconnaît la rotation de centre O d'affixe 0 et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

3. Caractériser l'application $s(z) = 2iz + 1 - 2i$.

Réponse : On reconnait une similitude directe avec $a = 2i$ et $b = 1 - 2i$. On sait que s est la similitude de centre $\Omega\left(\frac{b}{1-a} = 1\right)$, de rapport $|2i| = 2$ et d'angle $\arg(2i) = \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

4-Donner la représentation complexe de la similitude directe de centre $\Omega(-1)$, de rapport 3 et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$.

Réponse : D'après le cours, une similitude directe a une représentation complexe de la forme $s(z) = az + b$ avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.
Le rapport correspond au module de a et l'angle est un argument de a, on en déduit que $a = 3e^{i\frac{\pi}{4}}$.
Enfin -1 est un point fixe de s, c'est-à-dire que $s(-1) = -1$, cette relation va nous permettre de trouver b. En effet :

$$-1 = 3e^{i\frac{\pi}{4}}(-1) + b \Leftrightarrow b = -1 + 3e^{i\frac{\pi}{4}}$$

Ainsi :

$$s(z) = 3e^{i\frac{\pi}{4}}z + (-1 + 3e^{i\frac{\pi}{4}})$$

5. Représenter dans le plan complexe l'ensemble suivant :

$$\left\{M(z),\ \arg\left(\frac{i-z}{2-z}\right) = \frac{\pi}{2}\ [\pi]\right\}$$

Réponse : Notons $A(i)$ et $B(2)$. D'après le cours, un argument de $\dfrac{i-z}{2-z}$ correspond à une mesure de l'angle orienté formé par les vecteurs $\overrightarrow{BM}$ et $\overrightarrow{AM}$. On cherche donc l'ensemble des points M tels que $BM \perp AM$, on sait que cela correspond au cercle de diamètre $[AB]$ auquel on enlève A (pour ne pas considérer un argument de 0) et B (pour ne pas diviser par 0).

L'ensemble recherché est le cercle de diamètre $[AB]$ privé de A et B.

6-Pour $n \in \mathbb{N}^*$, trouver tous les nombres complexes z tels que $(\sqrt{3}+3i)z^n = -6$.

Réponse : On transforme tout d'abord l'équation pour se ramener une forme $z^n = \omega$ que l'on sait résoudre à l'aide des racines n-ième de l'unité. On a :

$$(\sqrt{3}+3i)z^n = -6 \Leftrightarrow z^n = \frac{-6}{\sqrt{3}+3i} \Leftrightarrow z^n = -\frac{6(\sqrt{3}-3i)}{12} \Leftrightarrow z^n = -\frac{\sqrt{3}-3i}{2}$$

On doit ensuite écrire $-\dfrac{\sqrt{3}-3i}{2}$ sous forme exponentielle, ce qui donne en calculant le module qui vaut $\sqrt{3}$:

$$-\frac{\sqrt{3}-3i}{2} = \sqrt{3}\Big(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\Big) = \sqrt{3}e^{\frac{2i\pi}{3}}$$

Il reste à résoudre l'équation en utilisant les racines n-ième de l'unité :

$$\begin{aligned} z^n = \sqrt{3}e^{\frac{2i\pi}{3}} &\Leftrightarrow \left(\frac{z}{3^{\frac{1}{2n}}e^{\frac{2i\pi}{3n}}}\right)^n = 1 \\ &\Leftrightarrow \exists k \in [\![0, n-1]\!],\ \frac{z}{3^{\frac{1}{2n}}e^{\frac{2i\pi}{3n}}} = e^{\frac{2ik\pi}{n}} \\ &\Leftrightarrow \exists k \in [\![0, n-1]\!],\ z = 3^{\frac{1}{2n}}e^{\frac{2ik\pi}{n}+\frac{2i\pi}{3n}} \end{aligned}$$

Ainsi l'ensemble des solutions est :

$$\mathcal{S} = \left\{3^{\frac{1}{2n}}e^{2i\pi\frac{1+3k}{3n}},\ k \in [\![0, n-1]\!]\right\}$$

On utilise la définition de l'énoncé, on résout l'équation par équivalences :

$$\begin{aligned}
\sin(z) = 2 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 2 \\
&\Leftrightarrow \quad e^{iz} - e^{-iz} = 4i \\
&\Leftrightarrow \quad X - \frac{1}{X} = 4i \text{ (en posant } X = e^{iz}\text{)} \\
&\Leftrightarrow \quad X^2 - 4iX - 1 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad X = (2+\sqrt{3})i \text{ ou } X = (2-\sqrt{3})i \\
&\Leftrightarrow \quad e^{iz} = (2+\sqrt{3})i \text{ ou } e^{iz} = (2-\sqrt{3})i
\end{aligned}$$

On sait résoudre l'équation $e^{iz} = (2+\sqrt{3})i$ puisque l'on a appris en cours à résoudre l'équation $e^z = \omega$ où $\omega \in \mathbb{C}^*$. On procède de même pour trouver :

$$iz = \ln(2+\sqrt{3}) + i\frac{\pi}{2} + 2ik\pi, \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

De même pour l'équation $e^{iz} = (2-\sqrt{3})i$ qui nous donne :

$$iz = \ln(2-\sqrt{3}) + i\frac{\pi}{2} + 2ik\pi, \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

Il reste à diviser par i pour obtenir les solutions suivantes :

$$\mathcal{S} = \left\{ \frac{\pi}{2} + 2k\pi - i\ln(2\pm\sqrt{3}),\ k \in \mathbb{Z} \right\}$$