

Chapitre 5 : Calculs de primitives et d'intégrales

Calcul de $I = \int_0^1 \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} dt.$

On pose $x = \sqrt{\frac{1-t}{1+t}}$ ce changement de variable est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1[$.

Après un rapide calcul, on trouve :

$$x = \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} \Leftrightarrow t = \frac{1-x^2}{1+x^2}$$

Ainsi :

$$dt = \frac{-2x(1+x^2) - (1-x^2)2x}{(1+x^2)^2} dx = \frac{-4x}{(1+x^2)^2} dx$$

On remplace en changeant les bornes :

Chapitre 5 : Calculs de primitives et d'intégrales

$$I = \int_1^0 \frac{-4x^2}{(1+x^2)^2} dx = \int_0^1 \frac{4x^2}{(1+x^2)^2} dx =$$

Chapitre 5 : Calculs de primitives et d'intégrales

$$I = \int_1^0 \frac{-4x^2}{(1+x^2)^2} dx = \int_0^1 \frac{4x^2}{(1+x^2)^2} dx = \int_0^1 -2x \times \frac{-2x}{(1+x^2)^2} dx$$

Chapitre 5 : Calculs de primitives et d'intégrales

$$I = \int_1^0 \frac{-4x^2}{(1+x^2)^2} dx = \int_0^1 \frac{4x^2}{(1+x^2)^2} dx = \int_0^1 -2x \times \frac{-2x}{(1+x^2)^2} dx$$

On poursuit avec une intégration par parties en posant :

$$\begin{aligned} u'(x) &= \frac{-2x}{(1+x^2)^2} & u(x) &= \frac{1}{1+x^2} \\ v(x) &= -2x & v'(x) &= -2 \end{aligned}$$

Ce qui donne :

$$I = \left[\frac{-2x}{1+x^2} \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{2}{1+x^2} dx = -1 + \left[2\text{Arctan}(x) \right]_0^1 = -1 + \frac{\pi}{2}$$