1-Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de $f : t \mapsto \dfrac{1}{it+1}$.

2-Déterminer une primitive de $f : t \mapsto \dfrac{1}{t^2-6t+8}$.

3-Déterminer une primitive de $f : t \mapsto \dfrac{1}{t^2+3t+4}$.

4-Donner une primitive de $f : x \mapsto \dfrac{ax^2+bx+c}{x^2+1}$ où $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$.

5- Déterminer une primitive de $f : x \mapsto -\dfrac{1}{\sqrt{1-2x^2}}$.

6-Déterminer une primitive de $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sin^2(x)}$ sur $]0,\pi[$.

7-Soit f une fonction continue sur $[0,1]$. Trouver une condition nécessaire et suffisante portant sur f afin que :

$$\left|\int_0^1 f(t)dt\right| = \int_0^1 |f(t)|dt$$

1-Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de $f : t \mapsto \dfrac{1}{it+1}$.

Réponse : La fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}
\int \frac{dt}{it+1} &= \frac{1}{i}\int \frac{dt}{t-i} = \frac{1}{i}\int \frac{t+i}{(t+i)(t-i)}dt \\
&= \frac{1}{i}\Big(\int \frac{t}{t^2+1}dt + i\int \frac{1}{t^2+1}dt\Big) \\
&= \frac{1}{i} \times \frac{1}{2}\ln(t^2+1) + \operatorname{Arctan}(t) \\
&= \operatorname{Arctan}(t) - \frac{i}{2}\ln(t^2+1)
\end{aligned}$$

2-Déterminer une primitive de $f : t \mapsto \dfrac{1}{t^2 - 6t + 8}$.

Réponse : La fonction f est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2, 4\}$. Pour tout $t \in \mathbb{R} \setminus \{2, 4\}$, on a :

$$\frac{1}{t^2 - 6t + 8} = \frac{1}{(t-2)(t-4)} = \frac{-\frac{1}{2}}{t-2} + \frac{\frac{1}{2}}{t-4}$$

Une primitive de f est $F : t \mapsto -\dfrac{1}{2}\ln(|t-2|) + \dfrac{1}{2}\ln(|t-4|)$.

3-Déterminer une primitive de $f : t \mapsto \dfrac{1}{t^2+3t+4}$.

Réponse : Le discriminant du trinôme au dénominateur est strictement négatif ainsi la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$. On a :

$$\frac{1}{t^2+3t+4} = \frac{1}{(t+\frac{3}{2})^2+\frac{7}{4}} = \frac{1}{(t+\frac{3}{2})^2+\left(\sqrt{\frac{7}{4}}\right)^2}$$

Une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est :

$$F : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{\frac{7}{4}}}\mathrm{Arctan}\left(\frac{t+\frac{3}{2}}{\sqrt{\frac{7}{4}}}\right) = \frac{2}{\sqrt{7}}\mathrm{Arctan}\left(\frac{2t+3}{\sqrt{7}}\right)$$

4-Donner une primitive de $f : x \mapsto \dfrac{ax^2+bx+c}{x^2+1}$ où $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$.

Réponse : $f : x \mapsto \dfrac{ax^2+bx+c}{x^2+1}$ qui est définie sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = \frac{ax^2+bx+c}{x^2+1} = \frac{a(x^2+1)+bx+c-a}{x^2+1} = a + \frac{bx}{x^2+1} + \frac{c-a}{x^2+1}$$

Une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est :

$$F : x \mapsto ax + \frac{b}{2}\ln(x^2+1) + (c-a)\mathrm{Arctan}(x)$$

5- Déterminer une primitive de $f : x \mapsto -\dfrac{1}{\sqrt{1-2x^2}}$.

Réponse : $f : x \mapsto -\dfrac{1}{\sqrt{1-2x^2}}$ est définie sur $\left]-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right[$. Pour tout $x \in \left]-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right[$, on a :

$$f(x) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-(\sqrt{2}x)^2}} \text{ de la forme } -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} \text{ avec } u(x) = \sqrt{2}x$$

Une primitive est :

$$F : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{Arccos}(\sqrt{2}x) \text{ définie sur } \left]-\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}\right[$$

6-Donner une primitive de $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sin^2(x)}$ sur $]0,\pi[$.

Réponse : $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sin^2(x)}$ est définie sur $]0,\pi[$. Pour tout $x \in]0,\pi[$:

$$f(x) = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\sin^2(x)} = -\frac{-\sin^2(x) - \cos^2(x)}{\sin^2(x)}$$

C'est de la forme $\dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ avec $u(x) = \cos(x)$ et $v(x) = \sin(x)$. Une primitive de f sur $]0,\pi[$ est :

$$F : x \mapsto -\frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$

7-Soit f une fonction continue sur $[0,1]$. Trouver une condition nécessaire et suffisante portant sur f afin que :

$$\left|\int_0^1 f(t)dt\right| = \int_0^1 |f(t)|dt$$

Réponse : La condition nécessaire et suffisante est que f garde un signe constant sur l'intervalle $[0,1]$.