1-Que vaut $\binom{3}{5}$? Que vaut $\binom{5}{3}$?

2-Soient k, p et n des entiers naturels avec $p \leq k \leq n$. Démontrer que :

$$\binom{n-p}{k-p}\binom{n}{p} = \binom{n}{k}\binom{k}{p}$$

3-Soit $p \in \mathbb{N}$, écrire à l'aide de factorielles les quantités :

$$A = 2 \times 4 \times 6 \times ... \times 2p$$

$$B = 1 \times 3 \times 5 \times ... \times (2p+1)$$

4-★ Démontrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que :

$$\prod_{k=1}^{n}(4k-2) = \prod_{k=1}^{n}(n+k)$$

1-Que vaut $\binom{3}{5}$? Que vaut $\binom{5}{3}$?

Réponse : Par convention $\binom{3}{5} = 0$. On a :

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!2!} = \frac{120}{6 \times 2} = 10$$

2-Soient k, p et n des entiers naturels avec $p \leq k \leq n$. Démontrer que : $\binom{n-p}{k-p}\binom{n}{p} = \binom{n}{k}\binom{k}{p}$.

Réponse : On a :

$$\binom{n-p}{k-p}\binom{n}{p} = \frac{(n-p)!}{(k-p)!(n-k)!}\frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n!}{(k-p)!(n-k)!p!}$$

$$= \frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{k!}{(k-p)!p!} = \binom{n}{k}\binom{k}{p}$$

3-Soit $p \in \mathbb{N}$, écrire à l'aide de factorielles les quantités :

$$A = 2 \times 4 \times 6 \times ... \times 2p$$

$$B = 1 \times 3 \times 5 \times ... \times (2p + 1)$$

Réponse : On remarque que :

$$A = (2 \times 1) \times (2 \times 2) \times (2 \times 3) \times ... \times (2 \times p) = 2^p p!$$

Pour le calcul de B, on a :

$$B = \frac{(2p+1)!}{A} = \frac{(2p+1)!}{2^p p!}$$

4-★ Démontrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que :

$$\prod_{k=1}^{n} (4k-2) = \prod_{k=1}^{n} (n+k)$$

Réponse : • **Initialisation.** Pour $n = 0$, les deux sommes valent 1 car elles sont vides.

• **Hérédité.** On suppose l'égalité vraie au rang $n \in \mathbb{N}$ fixé, démontrons-là au rang $n + 1$.

$$\begin{aligned}
\prod_{k=1}^{n+1}(4k-2) &= (4(n+1)-2)\prod_{k=1}^{n}(4k-2) \\
&= (4n+2)\prod_{k=1}^{n}(n+k) \\
&= 2(2n+1)\prod_{i=0}^{n-1}(n+i+1) \qquad (i=k-1) \\
&= 2(n+1)\prod_{i=1}^{n}(n+1+i) \\
&= \prod_{i=1}^{n+1}(n+1+i)
\end{aligned}$$

Ce qui démontre le résultat voulu et termine la récurrence.