Exercice 1

1. Il est exclu d'élever directement les deux membres de cette inégalité au carré puisque $x-1$ peut être négatif. Il faut distinguer plusieurs cas en remarquant avant tout que pour que l'inéquation ait un sens il faut que $x \geq -2$.
▶ Si $-2 \leq x < 1$ alors $x-1<0$. Ainsi, il est clair que $x-1<\sqrt{x+2}$ puisque qu'une racine carrée est positive. Les réels de l'intervalle $[-2,1[$ sont solutions.
▶ Si $x \geq 1$, les deux membres de l'inégalité sont positifs et dans ce cas :

$$x-1<\sqrt{x+2} \Leftrightarrow x^2-2x+1<x+2 \Leftrightarrow x^2-3x-1<0$$

Les racines du trinôme x^2-3x-1 sont $x_1=\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}$ et $x_2=\dfrac{3-\sqrt{13}}{2}$. Ce trinôme est strictement négatif entre ses racines, c'est-à-dire sur l'intervalle : $]x_2,x_1[$. Il faut tenir compte de la condition initiale : $x \geq 1$. Les réels de l'intervalle $\left[1,\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}\right[$ sont solutions.

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions est } \left[-2,\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}\right[}$$

2. (a) Comme on est en présence d'une différence de deux racines carrées, on multiplie par la quantité conjuguée. Pour tout $x \in]-1,1[$:

$$\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}=\frac{(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}=\frac{(1+x)-(1-x)}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}=\frac{2}{(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}$$

On passe à la limite quand x tend vers 0 :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}=1$$

(b) On reconnait un taux de variation puisque :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-\cos(0)}{x-0}=\cos'(0)=-\sin(0)=0$$

(c) Là aussi, on reconnaît un taux de variation :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(5x)}{x}=\lim_{x\to 0}5\frac{\sin(5x)}{5x}=5\lim_{y\to 0}\frac{\sin(y)}{y}=5$$

Ceci en posant $y=5x$ et en remarquant que $\lim\limits_{x\to 0} y=0$.

3. Posons $u\ :\ x\mapsto \dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$
Étudions le dénominateur, pour $x\in\mathbb{R}$, on a :

$$e^x-e^{-x}>0 \Leftrightarrow e^x>e^{-x} \Leftrightarrow x>-x \Leftrightarrow x>0$$

Ceci en passant au ln dans l'inégalité puisque ln est une fonction strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
Le même type de calcul montre que $e^x-e^{-x}=0 \Leftrightarrow x=0$.

On aurait également pu étudier la fonction $x\mapsto e^x-e^{-x}$ afin d'obtenir les mêmes résultats.

Ceci démontre que les fonctions u et f sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a :

$$u'(x) = \frac{(e^x - e^{-x})(e^x - e^{-x}) - (e^x + e^{-x})(e^x + e^{-x})}{(e^x - e^{-x})^2} = \frac{-4}{(e^x - e^{-x})^2}$$

Cette dernière égalité étant obtenue en développant le numérateur.

On a $f = \ln(u)$ qui se dérive en $f' = \dfrac{u'}{u}$, ce qui donne :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) = \frac{\frac{-4}{(e^x-e^{-x})^2}}{\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}} = \frac{-4}{(e^x + e^{-x})(e^x - e^{-x})} = \frac{-4}{e^{2x} - e^{-2x}}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) = \frac{-4}{e^{2x} - e^{-2x}}}$$

4. (a) D'après le cours, la négation de "$Q \Rightarrow R$" est "Q et non(R)". Ainsi, la négation de (P) est :

$$\text{non}(P)\ :\ (x \neq -1 \ \text{ et } y \neq -1) \text{ et } x + y + xy = -1$$

(b) La contraposée de (P) est :

$$x + y + xy = -1 \Rightarrow (x = -1 \text{ ou } y = -1)$$

(c) Il y a plusieurs méthodes, on peut par exemple démontrer que la contraposée est vraie. On suppose que $x + y + xy = -1$, montrons que $x = -1$ ou $y = -1$. D'après notre hypothèse $x + y + xy + 1 = 0$, ce qui donne en factorisant $(x + 1)(y + 1) = 0$. On en déduit effectivement que $x = -1$ ou $y = -1$.

(d) La réciproque est également vraie. En effet, toujours en utilisant la contraposée, si l'on suppose que $x = -1$ ou $y = -1$ alors $(x + 1)(y + 1) = 0$. En développant, on obtient bien $x + y + xy = -1$, ce qui démontre l'implication réciproque et donc l'équivalence.

5. (a) On applique la formule du cours permettant de factoriser $a^n - b^n$ avec $b = 2$ et $n = 5$:

$$\boxed{a^5 - 2^5 = (a - 2)(a^4 + 2a^3 + 4a^2 + 8a + 16)}$$

(b) On utilise les sommes classiques vues en cours et la linéarité de la somme :

$$\sum_{k=1}^{n}(2k + 3k^2) = 2\sum_{k=1}^{n} k + 3\sum_{k=1}^{n} k^2 = 2\frac{n(n+1)}{2} + 3\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

En simplifiant, on trouve :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n}(2k + 3k^2) = \frac{1}{2}n(n+1)(2n+3)}$$

(c) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$P_n = 3^n \prod_{k=2}^{n+1} e^{2^k} = 3^n \times \exp\left(\sum_{k=2}^{n+1} 2^k\right) = 3^n e^{2^2 \times \frac{2^n-1}{2-1}} = 3^n e^{2^{n+2}-4}$$

$$\boxed{P_n = 3^n e^{2^{n+2}-4}}$$

6. On forme une table de vérité en notant, comme d'habitude, V pour vrai et F pour faux.

P	Q	R	P ou Q	$(P$ ou $Q) \Rightarrow R$	$P \Rightarrow R$	$Q \Rightarrow R$	$(P \Rightarrow R)$ et $(Q \Rightarrow R)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F	F
V	F	V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F	V	F
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	V	F	F
F	F	V	F	V	V	V	V
F	F	F	F	V	V	V	V

On constate que les colonnes des propositions "$(P$ ou $Q) \Rightarrow R$" et de "$(P \Rightarrow R)$ et $(Q \Rightarrow R)$" sont identiques, ce qui démontre le résultat annoncé.

$$\boxed{(P \text{ ou } Q) \Rightarrow R \sim (P \Rightarrow R) \text{ et } (Q \Rightarrow R)}$$

Exercice 2

1. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction h_n est dérivable sur $]-1, +\infty[$ comme somme et quotient de fonctions usuelles qui sont dérivables sur $]-1, +\infty[$. Pour tout $x \in]-1, +\infty[$, on a :

$$h_n'(x) = \frac{n}{1+x} + \frac{1+x-x}{(1+x)^2} = \frac{nx+n+1}{(1+x)^2}$$

Or $x > -1$ donc $nx > -n$ et par suite $nx + x > 0$. On en déduit que le numérateur de h_n' est strictement positif sur $]-1, +\infty[$, d'où h_n' est strictement positive sur $]-1, +\infty[$.

$$\boxed{h_n \text{ est strictement croissante sur }]-1, +\infty[}$$

(b) On a $h_n(0) = 0$ et h_n strictement croissante sur $]-1, +\infty[$, ce qui nous donne le signe de h_n :

$$\boxed{h_n \text{ est négative sur }]-1, 0] \text{ et } h_n \text{ est positive sur } [0, +\infty[}$$

(c) i. Pour $n = 1$, on a $f_1 : x \mapsto x \ln(1+x)$. Cette fonction est clairement dérivable sur $]-1, +\infty[$ comme produit et composée de fonctions dérivables.
Pour tout $x \in]-1, +\infty[$, on a :

$$f_1'(x) = \ln(1+x) + \frac{x}{1+x} = h_1(x)$$

$$\boxed{\forall x \in]-1, +\infty[,\ f_1'(x) = h_1(x)}$$

ii. On connait le signe de h_1 d'après la question 1.(b), on en déduit le signe de f_1 et par suite :

$$\boxed{f_1 \text{ est strictement décroissante sur }]-1, 0] \text{ et } f_1 \text{ est strictement croissante sur } [0, +\infty[}$$

(d) Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$.

i. La fonction f_n est dérivable sur $]-1,+\infty[$ comme produit de fonctions dérivables.
Pour tout $x \in]-1,+\infty[$, on a :

$$f_n'(x) = nx^{n-1}\ln(1+x) + \frac{x^n}{1+x} = x^{n-1}\left(n\ln(1+x) + \frac{x}{1+x}\right) = x^{n-1}h_n(x)$$

$$\boxed{\forall x \in]-1,+\infty[,\ f_n'(x) = x^{n-1}h_n(x)}$$

ii. Le signe de x^{n-1} pour $x \in]-1,+\infty[$ dépend de la parité de n. Plus précisément, on a :

n pair :

x	-1		0		
$h_n(x)$		$-$	0	$+$	
x^{n-1}		$-$	0	$+$	
f_n'		$+$	0	$+$	
$f_n(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

n impair :

x	-1		0		
$h_n(x)$		$-$	0	$+$	
x^{n-1}		$+$	0	$+$	
$f_n'(x)$		$-$	0	$+$	
$f_n(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Pour les limites en -1, on a pour $n \geq 2$:

- si n est pair, $\lim\limits_{x\to-1} x^n = 1$ et $\lim\limits_{x\to-1} \ln(1+x) = -\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-1} f(x) = -\infty$.
- si n est impair, $\lim\limits_{x\to-1} x^n = -1$ et $\lim\limits_{x\to-1} \ln(1+x) = -\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-1} f(x) = +\infty$.

Dans les deux cas, la droite d'équation $x = -1$ est asymptote verticale à $\mathcal{C}_{f_n}$.

La limite en $+\infty$ ne pose pas de problème. Il n'y a pas d'asymptote en $+\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ mais $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} x^{n-1}\ln(1+x) = +\infty$ car $n \geq 2$.

2. (a) i. Soit $x \in [0,1]$. Pour effectuer le calcul proposé, on peut réduire le membre de droite au même dénominateur puis identifier. Voici une autre méthode :

$$\forall x \in [0,1],\ \frac{x^2}{x+1} = \frac{x^2-1+1}{x+1} = \frac{(x+1)(x-1)+1}{x+1} = \frac{(x+1)(x-1)}{x+1} + \frac{1}{x+1} = x-1+\frac{1}{x+1}$$

$$\boxed{\text{On peut choisir } a = 1,\ b = -1 \text{ et } c = 1}$$

ii. On utilise la décomposition trouvée à la question précédente pour faire ce calcul :

$$\int_0^1 \frac{x^2}{x+1}dx = \int_0^1 \left(x-1+\frac{1}{x+1}\right)dx = \left[\frac{1}{2}x^2 - x + \ln(1+x)\right]_0^1$$

En simplifiant, cela donne :

$$\boxed{\int_0^1 \frac{x^2}{x+1}dx = \ln(2) - \frac{1}{2}}$$

iii. On doit calculer $U_1 = \displaystyle\int_0^1 x\ln(1+x)dx$. Nous allons utiliser la méthode d'intégration par parties, que l'on verra prochainement en cours et qui est présentée à la page 29 du document de pré-rentrée. On pose :

$$v(x) = \ln(1+x) \qquad v'(x) = \frac{1}{1+x}$$

$$u'(x) = x \qquad\qquad u(x) = \frac{1}{2}x^2$$

Les fonctions u, v, u' et v' sont continues sur $[0, 1]$, on a ainsi :

$$\int_0^1 x\ln(1+x)dx = \left[\frac{1}{2}x^2\ln(1+x)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{2(1+x)}dx = \frac{\ln(2)}{2} - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2}{1+x}dx = \frac{1}{4}$$

Ceci en utilisant le résultat obtenu à la question précédente.

$$\boxed{U_1 = \frac{1}{4}}$$

(b) i. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0, 1]$, on a $x^{n+1} - x^n = x^n(x-1) \leq 0$ et $\ln(1+x) \geq 0$. On en déduit que $(x^{n+1} - x^n)\ln(1+x) \leq 0$, c'est-à-dire $x^{n+1}\ln(1+x) \leq x^n\ln(1+x)$. On intègre cette inégalité sur $[0, 1]$, par croissance de l'intégrale, il vient :

$$U_{n+1} = \int_0^1 x^{n+1}\ln(1+x)dx \leq \int_0^1 x^n\ln(1+x)dx = U_n$$

$$\boxed{(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est décroissante}}$$

ii. Soit $x \in [0, 1]$, on a $1 + x \leq 2$ donc par croissance de la fonction ln, $\ln(1+x) \leq \ln(2)$. On multiplie par x^n qui est positif pour obtenir $0 \leq x^n\ln(1+x) \leq x^n\ln(2)$. Par croissance de l'intégrale, il vient :

$$0 \leq \int_0^1 x^n\ln(1+x)dx \leq \int_0^1 x^n\ln(2)dx = \ln(2)\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{\ln(2)}{n+1}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leq U_n \leq \frac{\ln(2)}{n+1}}$$

iii. En utilisant l'inégalité précédente et le théorème d'encadrement, étant donné que $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\ln(2)}{n+1} = 0$, on a :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} U_n = 0}$$

(c) i. On fixe $x \in [0, 1]$ et $n \geq 2$. On reconnait la somme des termes d'une suite géométrique de raison $-x$, on applique la formule sachant que $x \neq -1$:

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^k = \sum_{k=0}^n (-x)^k = \frac{1-(-x)^{n+1}}{1-(-x)} = \frac{1+(-1)^n x^{n+1}}{1+x} = \frac{1}{1+x} + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{1+x}$$

$$\boxed{\forall x \in [0, 1],\ S_n(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^k = \frac{1}{1+x} + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{1+x}}$$

ii. On intègre l'égalité précédente entre 0 et 1 sachant que, par linéarité de l'intégrale, l'intégrale d'une somme est égale à la somme des intégrales. D'une part, pour le membre de gauche :

$$\int_0^1 \Big(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^k\Big)dx = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \int_0^1 x^k dx = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \Big[\frac{x^{k+1}}{k+1}\Big]_0^1 = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1}$$

D'autre part, pour le membre de droite : $\displaystyle\int_0^1 \Big(\frac{1}{1+x}+\frac{(-1)^n x^{n+1}}{1+x}\Big)dx =$

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} + \int_0^1 \frac{(-1)^n x^{n+1}}{1+x}dx = [\ln(1+x)]_0^1 + \int_0^1 \frac{(-1)^n x^{n+1}}{1+x}dx = \ln(2) + \int_0^1 \frac{(-1)^n x^{n+1}}{1+x}dx$$

On en déduit la formule annoncée :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1} = \ln(2) + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}dx}$$

iii. Soit $n \geq 2$, on a : $U_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 x^n \ln(1+x)dx.$

Pour faire ce calcul, on va effectuer une intégration par parties en posant :

$$v(x) = \ln(1+x) \qquad v'(x) = \frac{1}{1+x}$$

$$u'(x) = x^n \qquad u(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

Les fonctions u, u', v et v' sont continues sur $[0,1]$, on obtient :

$$U_n = \Big[\frac{x^{n+1}}{n+1}\ln(1+x)\Big]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+x)}dx = \frac{\ln(2)}{n+1} - \frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}dx \qquad (2)$$

Cette dernière intégrale peut s'exprimer à l'aide de la question précédente et l'on a :

$$\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}dx = (-1)^n\Big(\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1} - \ln(2)\Big) \qquad (2)$$

En combinant les égalités (1) et (2), il vient :

$$\boxed{\forall n \geq 2,\ U_n = \frac{\ln(2)}{n+1} + \frac{(-1)^n}{n+1}\Big(\ln(2) - \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1}\Big)}$$

Problème : Puissances descendantes

A-Premières propriétés

1. Soit $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$x_{[0]} = \prod_{i=0}^{-1}(x-i) = 1$$

ceci en reconnaissant un produit vide, qui par convention vaut 1.

On a immédiatement :

$$x_{[1]} = \prod_{i=0}^{0}(x-i) = x$$

$$x_{[2]} = \prod_{i=0}^{1}(x-i) = x(x-1)$$

$$x_{[3]} = \prod_{i=0}^{2}(x-i) = x(x-1)(x-2)$$

2. (a) Soit $(k,m) \in \mathbb{N}^2$ avec $m > k$, on a :

$$k_{[m]} = \prod_{i=0}^{m-1}(k-i) = 0$$

puisque l'entier k se trouve dans l'intervalle $[\![0, m-1]\!]$ car $k < m$ et ainsi dans ce produit se trouve le facteur $k - k = 0$.

(b) Soit $(m,k) \in \mathbb{N}^2$. Il y a plusieurs cas à considérer :

- si $m > k$, on a par convention $\binom{k}{m} = 0$ et $\dfrac{k_{[m]}}{m!} = 0$ d'où l'égalité.
- si $m \leq k$, on a :

$$\binom{k}{m} = \frac{k!}{m!(k-m)!} \underset{(1)}{=} \frac{\prod\limits_{i=k-m+1}^{k} i}{m!} \underset{(2)}{=} \frac{\prod\limits_{j=0}^{m-1}(k-j)}{m!} = \frac{k_{[m]}}{m!}$$

(1) en simplifiant les factorielles

(2) détaillons ce passage là, tout d'abord on réalise le changement d'indice $j = i - (k-m+1)$ qui équivaut à $i = j + k - m + 1$ pour obtenir :

$$\prod_{i=k-m+1}^{k} i = \prod_{j=0}^{m-1} \underbrace{(j+k-m+1)}_{a_j}$$

puis on réalise un renversement du produit :

$$\prod_{j=0}^{m-1} \underbrace{(j+k-m+1)}_{a_j} = \prod_{j=0}^{m-1} a_{m-1-j} = \prod_{j=0}^{m-1}(k-j)$$

Dans les deux cas, nous avons démontré que :

$$\boxed{\forall (m,k) \in \mathbb{N}^2,\ \binom{k}{m} = \frac{k_{[m]}}{m!}}$$

(c) Soit $m \in \mathbb{N}$, par définition, on a :

$$(-1)_{[m]} = \prod_{i=0}^{m-1}(-1-i) = (-1)^m \prod_{i=0}^{m-1}(i+1) = (-1)^m m!$$

$$\boxed{\forall m \in \mathbb{N},\ (-1)_{[m]} = (-1)^m m!}$$

3. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$ et $m \in \mathbb{N}$, on a :

$$x_{[m+1]} = \prod_{i=0}^{m}(x-i) = x\prod_{i=1}^{m}(x-i) = x\prod_{j=0}^{m-1}(x-j-1) = x \times (x-1)_{[m]}$$

dans ce calcul, on a tout d'abord exclu le facteur pour $i=0$ puis effectué le changement d'indice $j = i-1$.

Pour l'autre égalité, on suit la même méthode en excluant cette fois-ci le dernier facteur du produit :

$$x_{[m+1]} = \prod_{i=0}^{m}(x-i) = (x-m)\prod_{i=0}^{m-1}(x-i) = (x-m) \times x_{[m]}$$

Ce qui démontre les formules souhaitées :

$$\boxed{\forall (k,m) \in \mathbb{N}^2,\ x_{[m+1]} = x \times (x-1)_{[m]} = x_{[m]} \times (x-m)}$$

(b) Soit $x \in \mathbb{R}$ et $m \in \mathbb{N}$, en utilisant la question précédente, on a :

$$(x+1)_{[m+1]} - x_{[m+1]} = (x+1) \times x_{[m]} - (x-m) \times x_{[m]} = x_{[m]} \times (x+1-(x-m)) = x_{[m]} \times (m+1)$$

$$\boxed{\forall (k,m) \in \mathbb{N}^2,\ (x+1)_{[m+1]} - x_{[m+1]} = (m+1)x_{[m]}}$$

(c) Soit $x \in \mathbb{R}$ et $(m,n) \in \mathbb{N}^2$, d'après la question précédente, on a :

$$k_{[m]} = \frac{(k+1)_{[m+1]} - k_{[m+1]}}{m+1}$$

On reporte ceci dans la somme de l'énoncé pour reconnaitre une somme télescopique :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} k_{[m]} &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(k+1)_{[m+1]} - k_{[m+1]}}{m+1} \\
&= \frac{1}{m+1}\sum_{k=0}^{n}((k+1)_{[m+1]} - k_{[m+1]}) \\
&= \frac{1}{m+1}\Big((n+1)_{[m+1]} - 0_{[m+1]}\Big) \\
&= \frac{(n+1)_{[m+1]}}{m+1}
\end{aligned}$$

4. (a) • Traitons pour commencer le cas où $m = 1$. En utilisant notamment la question 1 et la question précédente, il vient :
$$\sum_{k=0}^{n} k = \sum_{k=0}^{n} k_{[1]} = \frac{(n+1)_{[2]}}{2} = \frac{(n+1)n}{2}$$
et l'on retrouve la formule bien connue.

• Pour $m = 2$, on remarque tout d'abord que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $k^2 = k(k-1) + k = k_{[2]} + k_{[1]}$, ainsi par linéarité de la somme :
$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \sum_{k=0}^{n}(k_{[2]} + k_{[1]}) = \sum_{k=0}^{n} k_{[2]} + \sum_{k=0}^{n} k_{[1]} = \frac{(n+1)_{[3]}}{3} + \frac{(n+1)_{[2]}}{2} = \frac{(n+1)n(n-1)}{3} + \frac{(n+1)n}{2}$$
En simplifiant, on retrouve bien :
$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

(b) Soit $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ avec $p \leq n$. On utilise la question 2.(a) :
$$\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \sum_{k=p}^{n} \frac{k_{[p]}}{p!} = \frac{1}{p!} \sum_{k=p}^{n} k_{[p]} = \frac{1}{p!} \sum_{k=0}^{n} k_{[p]}$$
en effet, on peut commencer la somme à 0 puisque pour $k \in [\![0, p-1]\!]$, $k_{[p]} = 0$.
Ainsi, d'après la relation ($\bigstar$) :
$$\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \sum_{k=0}^{n} k_{[p]} = \frac{(n+1)_{[p+1]}}{p!(p+1)} = \frac{(n+1)_{[p+1]}}{(p+1)!} = \binom{n+1}{p+1}$$

On obtient la formule :
$$\boxed{\forall (n, p) \in \mathbb{N}^2,\ p \leq n,\ \sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}}$$

B-Puissances descendantes négatives

1. (a) Par définition, nous avons $x_{[-3]} = \dfrac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)}$ qui est défini pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, -2, -3\}$.

(b) Plus généralement, afin que le dénominateur ne s'annule pas, il convient que $x \in \mathbb{R} \setminus [\![-m, -1]\!]$.

2. • Pour $m \in \mathbb{N}$, la formule proposée a déjà été démontrée dans la question 3.(b) et dans ce cas elle est valable pour tout $x \in \mathbb{R}$.

• À présent, pour $m \in \mathbb{Z}$ avec $m < 0$, afin que les trois quantités mises en jeu dans la formule aient un sens, nous devons avoir : $x \notin [\![m+1, -1]\!]$, $x \notin [\![m, -1]\!]$ et $x + 1 \notin [\![m+1, -1]\!]$. C'est -à-dire $x \in \mathbb{R} \setminus [\![m, -1]\!]$, ce que l'on considère dans la suite du calcul.

• Traitons d'abord le cas où $m = -1$, on a pour $x \neq -1$:
$$(x+1)_{[m+1]} - x_{[m+1]} = (x+1)_{[0]} - x_{[0]} = 1 - 1 = 0$$
ce qui est bien égal à :
$$(m+1)x_{[m]} = 0 \times \frac{1}{x+1} = 0$$

L'égalité est vérifiée dans ce cas.

• Enfin, prenons $m < -1$ et $x \in \mathbb{R} \setminus [\![m, -1]\!]$:

$$(x+1)_{[m+1]} - x_{[m+1]} = \frac{1}{\prod_{i=1}^{-(m+1)} (x+1+i)} - \frac{1}{\prod_{i=1}^{-(m+1)} (x+i)}$$

On effectue le changement de variable $j = i+1$ dans le premier produit puis on réduit au même dénominateur :

$$(x+1)_{[m+1]} - x_{[m+1]} = \frac{1}{\prod_{j=2}^{-m}(x+j)} - \frac{1}{\prod_{i=1}^{-(m+1)} (x+i)} = \frac{(x+1)-(x-m)}{\prod_{i=1}^{-m}(x+i)} = (m+1)x_{[m]}$$

Finalement :

$$\boxed{\forall m \in \mathbb{Z},\ \forall x \in \mathbb{R} \setminus [\![m, -1]\!],\ (x+1)_{[m+1]} - x_{[m+1]} = (m+1)x_{[m]}}$$

3. (a) Soient $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ avec $m \geq 2$, nous allons utiliser la formule de la question précédente afin de faire apparaitre une somme télescopique. On a :

$$S_{n,m} = \sum_{k=0}^{n} k_{[-m]} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(k+1)_{[-m+1]} - k_{[-m+1]}}{-m+1} = \frac{1}{-m+1}\left((n+1)_{[-m+1]} - 0_{[-m+1]}\right)$$

Tout ceci étant bien défini d'après le domaine de validité étudié à la question précédente.
Il reste à simplifier le résultat :

• D'une part, en posant $j = n+1+i$:

$$(n+1)_{[-m+1]} = \frac{1}{\prod_{i=1}^{m-1}(n+1+i)} = \frac{1}{\prod_{j=n+2}^{n+m} j} = \frac{(n+1)!}{(n+m)!}$$

• D'autre part :

$$0_{[-m+1]} = \frac{1}{\prod_{i=1}^{m-1} i} = \frac{1}{(m-1)!}$$

Finalement :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \forall m \geq 2,\ S_{n,m} = \frac{1}{m-1}\left(\frac{1}{(m-1)!} - \frac{(n+1)!}{(n+m)!}\right)}$$

(b) Lors du calcul de la question précédente, nous avons remarqué que :

$$\frac{(n+1)!}{(n+m)!} = \prod_{j=n+2}^{n+m} \frac{1}{j}$$

Dans ce produit, tous les facteurs sont inférieurs ou égaux à 1, nous pouvons donc majorer le produit par le premier facteur pour obtenir :

$$0 \leq \frac{(n+1)!}{(n+m)!} \leq \frac{1}{n+2}$$

Ainsi, d'après le théorème d'encadrement :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)!}{(n+m)!} = 0$$

Nous en déduisons que :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} S_{n,m} = \frac{1}{(m-1)! \times (m-1)}}$$

4. (a) On utilise pour commencer la formule de la question 2.(b), pour $(m,n) \in \mathbb{N}^2$ avec $2 \leq m \leq n$, on a :

$$\sum_{k=m}^{n} \frac{1}{\binom{k}{m}} = \sum_{k=m}^{n} \frac{m!}{k_{[m]}}$$

On utilise un renversement du produit afin de faire le calcul suivant :

$$\frac{1}{k_{[m]}} = \frac{1}{\prod_{i=0}^{m-1}(k-i)} = \frac{1}{\prod_{j=1}^{m}(k-m+j)} = (k-m)_{[-m]}$$

On reprend le premier calcul avec cette simplification et on effectue le changement d'indices $p = k - m$:

$$\sum_{k=m}^{n} \frac{1}{\binom{k}{m}} = m! \sum_{k=m}^{n} (k-m)_{[-m]} = \sum_{p=0}^{n-m} p_{[-m]}$$

On en déduit que :

$$\boxed{\sum_{k=m}^{n} \frac{1}{\binom{k}{m}} = m! \sum_{k=0}^{n-m} k_{[-m]}}$$

(b) D'après la question précédente, on a pour $(m,n) \in \mathbb{N}^2$ avec $2 \leq m \leq n$:

$$\sum_{k=m}^{n} \frac{1}{\binom{k}{m}} = m! S_{n-m,m}$$

Il reste à utiliser la limite de la question 3.(b) pour obtenir :

$$\lim_{n\to+\infty} S_{n-m,m} = \frac{1}{(m-1)! \times (m-1)}$$

Finalement :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=m}^{n} \frac{1}{\binom{k}{m}} = \frac{m!}{(m-1)! \times (m-1)} = \frac{m}{m-1}}$$

C-Une autre formule du binôme

1. (a) Soient $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $m \in \mathbb{N}$ et $k \in [\![0,m]\!]$. On réutilise le résultat de la question 3.(a) de la partie A pour avoir :

$$x_{[k+1]}y_{[m-k]} + x_{[k]}y_{[m+1-k]} = x_{[k]}y_{[m-k]}(x-k) + x_{[k]}y_{[m-k]}(y-m+k) = x_{[k]}y_{[m-k]}(x+y-m)$$

Ce qui constitue bien la formule annoncée.

(b) Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, par analogie avec la formule du binôme de Newton, nous allons démontrer par récurrence sur $m \in \mathbb{N}$:

$$\mathcal{H}_m \ : \ (x+y)_{[m]} = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} x_{[k]}y_{[m-k]}$$

• **Initialisation.** Pour $m=0$, on a :

$$(x+y)_{[m]} = (x+y)_{[0]} = 1$$

et d'autre part :

$$\sum_{k=0}^{0} \binom{m}{k} x_{[k]}y_{[m-k]} = \binom{0}{0} x_{[0]}y_{[0]} = 1$$

L'égalité est vérifiée pour $m=0$.

• **Hérédité.** Fixons $m \in \mathbb{N}$ et supposons l'égalité vraie au rang m. On a :

$$\begin{aligned}
(x+y)_{[m+1]} &= (x+y)_{[m]}(x+y-m) \\
&= \left(\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} x_{[k]}y_{[m-k]}\right) \times (x+y-m) \\
&= \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} x_{[k]}y_{[m-k]}(x+y-m) \\
&= \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \left(x_{[k+1]}y_{[m-k]} + x_{[k]}y_{[m+1-k]}\right) \quad \text{(avec la question précédente)} \\
&= \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} x_{[k+1]}y_{[m-k]} + \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} x_{[k]}y_{[m+1-k]} \\
&= \sum_{i=1}^{m+1} \binom{m}{i-1} x_{[i]}y_{[m-i+1]} + \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} x_{[k]}y_{[m+1-k]} \quad (i=k+1) \\
&= x_{[m+1]} + y_{[m+1]} + \sum_{i=1}^{m} \left(\binom{m}{i-1} + \binom{m}{i}\right) x_{[i]}y_{[m-i+1]} \\
&= x_{[m+1]} + y_{[m+1]} + \sum_{i=1}^{m} \binom{m+1}{i} x_{[i]}y_{[m-i+1]} \quad \text{(formule de Pascal)} \\
&= \sum_{i=0}^{m+1} \binom{m+1}{i} x_{[i]}y_{[m-i+1]}
\end{aligned}$$

Ce qui démontre le résultat au rang $m+1$ et termine la récurrence.

$$\boxed{\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \forall m\in\mathbb{N},\ (x+y)_{[m]}=\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}x_{[k]}y_{[m-k]}}$$

2. (a) Prenons $x\in\mathbb{N}$, la formule souhaitée a été précisément démontrée dans la question 2.(b) de la partie A.

   (b) Soit $x\in\mathbb{R}$, on a par définition :
$$\binom{x}{0}=\frac{x_{[0]}}{0!}=\frac{1}{1}=1$$
   D'autre part, d'après la question 2.(c) de la partie A, on a :
$$\binom{-1}{m}=\frac{(-1)_{[m]}}{m!}=\frac{(-1)^m m!}{m!}=(-1)^m$$

   (c) Soient $x\in\mathbb{R}$ et $m\in\mathbb{N}$, on a :
$$\binom{x}{m}+\binom{x}{m+1}=\frac{x_{[m]}}{m!}+\frac{x_{[m+1]}}{(m+1)!}=\frac{(m+1)x_{[m]}+x_{[m+1]}}{(m+1)!}=\frac{(x+1)_{[m+1]}}{(m+1)!}$$
   Ceci en utilisant le résultat de la question 3.(b) de la partie A. On a ainsi généralisé la formule de Pascal.

3. Soient $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ et $m\in\mathbb{N}$, en utilisant la question 1.(b), on a :
$$\binom{x+y}{m}=\frac{(x+y)_{[m]}}{m!}=\frac{1}{m!}\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}x_{[k]}y_{[m-k]}=\sum_{k=0}^{m}\frac{x_{[k]}}{k!}\times\frac{y_{[m-k]}}{(m-k)!}=\sum_{k=0}^{m}\binom{x}{k}\binom{y}{m-k}$$
   Ce qui démontre la formule de Chu-Vandermonde :
$$\boxed{\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \forall m\in\mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{m}\binom{x}{k}\binom{y}{m-k}=\binom{x+y}{m}}$$

D-Application de la formule de Chu-Vandermonde

1. Soit $x\in\mathbb{R}$ et $m\in\mathbb{N}$. Il s'agit juste d'appliquer la formule de Chu-Vandermonde pour $y=-1$ ce qui donne bien :
$$\binom{x-1}{m}=\sum_{k=0}^{m}\binom{x}{k}\binom{-1}{m-k}=\sum_{k=0}^{m}\binom{x}{k}(-1)^{m-k}=(-1)^m\sum_{k=0}^{m}\binom{x}{k}(-1)^k$$
   On en déduit le résultat voulu :
$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\ \forall m\in\mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{x}{k}=(-1)^m\binom{x-1}{m}}$$

2. (a) Soit $k\in\mathbb{N}$, on a :
$$\Big(-\frac{1}{2}\Big)_{[k]}=\prod_{i=0}^{k-1}\Big(-\frac{1}{2}-i\Big)=(-1)^k\prod_{i=0}^{k-1}\frac{1+2i}{2}=\frac{(-1)^k}{2^k}\frac{(2k)!}{2^k k!}$$
   En effet, nous savons que le produit des entiers impairs de 0 à $2k$ vaut bien $\dfrac{(2k)!}{2^k k!}$.

On en déduit le résultat annoncé puisque :

$$\binom{-\frac{1}{2}}{k} = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)_{[k]}}{k!} = \frac{(-1)^k(2k)!}{4^k(k!)^2} = \frac{1}{(-4)^k}\binom{2k}{k}$$

On a bien :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ \binom{2k}{k} = (-4)^k\binom{-\frac{1}{2}}{k}}$$

(b) Déjà, remarquons que l'on ne peut pas appliquer directement la formule de Chu-Vandermonde car, dans cette formule, x et y ne doivent pas dépendre de l'indice de sommation, k. On va utiliser la formule de la question précédente, puis la formule de Chu-Vandermonde :

$$\sum_{k=0}^{m}\binom{2k}{k}\binom{2(m-k)}{m-k} = \sum_{k=0}^{m}\left((-4)^k\binom{-\frac{1}{2}}{k}\right)\left((-4)^{m-k}\binom{-\frac{1}{2}}{m-k}\right) = (-4)^m\sum_{k=0}^{m}\binom{-\frac{1}{2}}{k}\binom{-\frac{1}{2}}{m-k} = (-4)^m\binom{-1}{m} = (-4)^m(-1)^m = 4^m$$

$$\boxed{\forall m \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{m}\binom{2k}{k}\binom{2(m-k)}{m-k} = 4^m}$$