1-Donner un exemple d'anneau intègre qui n'est pas un corps.

2-Un corps est-il un anneau intègre ?

3-L'anneau $\mathbb{R}^2$ muni de l'addition et de la multiplication composante par composante est-il un corps ?

4-Soit K un corps, l'application définie de K dans K par $f : x \mapsto x^{-1}$ est-elle un automorphisme du corps K ?

5-Donner tous les morphismes d'anneaux de $(\mathbb{Z}, +, \times)$ dans lui-même.

6-Soit F un sous-corps de $(\mathbb{Q}, +, \times)$, montrer que $F = \mathbb{Q}$.

7-Existe t-il un corps à 4 éléments ?

1-Donner un exemple d'anneau intègre qui n'est pas un corps.

Réponse : $(\mathbb{Z}, +, \times)$ est un anneau. Il est intègre car si un produit d'entiers est nul alors l'un des deux facteurs est nul. Ce n'est pas un corps car 2 n'est pas inversible.

2-Un corps est-il un anneau intègre ?

Réponse : Un corps est non nul et commutatif ce qui sont des conditions requises pour avoir un anneau intègre. Soient $(a, b) \in K^2$, on suppose que $ab = 0$. Soit $a = 0$, soit $a \neq 0$ et dans ce cas a est inversible :

$$ab = 0 \Rightarrow a^{-1}ab = a^{-1} \times 0 \Rightarrow b = 0$$

Ainsi a ou b est nul. On en déduit qu'un corps est un anneau intègre.

3-L'anneau $\mathbb{R}^2$ muni de l'addition et de la multiplication composante par composante est-il un corps ?

Réponse : Ce n'est pas un corps car $(1, 0)$ n'a pas d'inverse pour la multiplication pourtant cet élément est non nul.

4-Soit K un corps, l'application définie de K dans K par $f : x \mapsto x^{-1}$ est-elle un automorphisme du corps K ?

Réponse : Cette application est mal définie puisque 0 n'a pas d'inverse.

5-Donner tous les morphismes d'anneaux de $(\mathbb{Z}, +, \times)$ dans lui-même.

Réponse : Par définition d'un morphisme d'anneau, on a en particulier :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{Z}^2,\ f(a+b) = f(a) + f(b) \text{ et } f(1) = 1$$

D'après la question 5 de l'AR11-5, on en déduit que $f = \mathrm{id}$.

6-Soit F un sous-corps de $(\mathbb{Q}, +, \times)$, montrer que $F = \mathbb{Q}$.

Réponse : Soit F un sous-corps de $\mathbb{Q}$.

- On doit avoir $0 \in F$ et $1 \in F$.
- F étant stable par somme : $\forall n \in \mathbb{N},\ n \in F$.
- F étant stable par passage à l'opposé : $\forall p \in \mathbb{Z},\ p \in F$.
- F est stable par passage à l'inverse : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{1}{n} \in F$.
- F est stable par produit :

$$\forall (p, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*,\ p \times \frac{1}{n} \in F$$

Finalement $\mathbb{Q} \subset F$ et comme $F \subset \mathbb{Q}$, on en déduit que $F = \mathbb{Q}$.

7-Existe t-il un corps à 4 éléments ?

Réponse : On considère l'ensemble $\mathbb{F}_4$ muni des lois $+$ et $\times$ suivantes :

$+$	0	1	α	α^2
0	0	1	α	α^2
1	1	0	α^2	α
α	α	α^2	0	1
α^2	α^2	α	1	0

$\times$	0	1	α	α^2
0	0	0	0	0
1	0	1	α	α^2
α	0	α	α^2	1
α^2	0	α^2	1	α

On peut démontrer que $(\mathbb{F}_4, +, \times)$ est un corps.