Les homographies

On se place dans le plan complexe muni du repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. Il ne sera pas pénalisé d'assimiler un point ou un vecteur du plan à son affixe. Par exemple, pour $z\in\mathbb{C}$, on pourra parler du point z alors qu'en toute rigueur il s'agit du point M d'affixe z.

Soient** $(a,b,c,d)\in\mathbb{C}^4$**, on appelle homographie une application de la forme** $f : z\mapsto \dfrac{az+b}{cz+d}$**.
On suppose dans tout le devoir que** $(c,d)\neq(0,0)$**.

Les différentes parties sont dans une large mesure indépendantes.

A-Généralités

1. Donner l'ensemble de définition de f.
2. Dans cette question, on suppose que $ad-bc=0$.
   (a) Montrer que si $a=0$ alors f est une application constante.
   (b) Montrer que si $c=0$ alors f est une application constante.
   (c) Traiter enfin le cas où $a\neq0$ et $c\neq0$ en montrant que f est constante égale à $\dfrac{a}{c}$.

   Nous avons traité complètement le cas où** $ad-bc=0$**, nous supposerons donc dans toute la suite du devoir que** $ad-bc\neq0$**.

3. (a) On suppose que $c=0$. Montrer que f est une bijection de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ et préciser f^{-1}.
   (b) On suppose que $c\neq0$. Montrer que f est une bijection de $\mathbb{C}\setminus\left\{-\dfrac{d}{c}\right\}$ vers $\mathbb{C}\setminus\{\omega_0\}$ où $\omega_0\in\mathbb{C}$ est à préciser. Expliciter f^{-1}.
4. Montrer qu'une homographie différente de $id_{\mathbb{C}}$ a au maximum 2 points fixes et donner des exemples d'homographies ayant 0, 1 puis 2 points fixes.

B-Cas où $c=0$ et $d=1$: les similitudes directes

Lorsque $c=0$ et $d=1$, l'application devient $f : z\mapsto az+b$ avec $(a,b)\in\mathbb{C}^2$.

1. (a) Justifier que $a\neq0$.
   (b) Énoncer avec précision le théorème vu en cours sur les similitudes directes, on ne demande pas de faire la preuve.
2. **Quelques exemples.**
   (a) Donner l'écriture complexe de la rotation de centre A d'affixe $-1+3i$ et d'angle $\dfrac{\pi}{6}$.
   (b) Donner l'écriture complexe de l'homothétie de centre B d'affixe $1+2i$ et de rapport -2.
   (c) Donner les éléments caractéristiques de la similitude directe d'écriture complexe $s : z\mapsto(-2+2i)z+5+i$.
3. Que dire d'une similitude directe possédant au moins deux points fixes distincts ?
4. Soit $s : z\mapsto az+b$ une similitude directe. Soient $A(z_A)$, $B(z_B)$ et $C(z_C)$ trois points distincts du plan complexe et leurs images respectives par s : $A'(z_{A'})$, $B'(z_{B'})$ et $C'(z_{C'})$. Démontrer que s préserve les angles orientés, c'est-à-dire que $(\overrightarrow{A'B'},\overrightarrow{A'C'})=(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$.

C-Étude de l'inversion

Dans cette partie, on se place dans le cas où $a = 0$, $b = 1$, $c = 1$ et $d = 0$, c'est-à-dire que nous allons étudier l'homographie $f : z \mapsto \dfrac{1}{z}$.

1. Calculer les images directes suivantes :
   (a) $f(\mathbb{C}^*)$.
   (b) $f(\mathbb{U}_n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
   (c) $f(\{1 + 2i, i\})$.
   (d) $f(\mathbb{R}_+^*)$.
2. Calculer les images réciproques suivantes :
   (a) $f^{-1}(\{-1 - 4i, 4\})$.
   (b) $f^{-1}(\mathbb{U})$.
   (c) $f^{-1}(i\mathbb{R})$.
   (d) $Re(f)^{-1}(\mathbb{R}_+^*)$.
3. Montrer que f est une bijection de $\mathbb{C}^*$ dans $\mathbb{C}^*$ et déterminer f^{-1}.

   Dans les questions suivantes, nous nous intéressons à l'image par f d'une droite ou d'un cercle du plan complexe.
4. **Image d'une droite.**
   (a) Déterminer l'image par f de l'axe des réels privé de l'origine et de l'axe des imaginaires purs privé de l'origine.
   (b) Plus généralement, déterminer l'image par f d'une droite passant par l'origine privée de l'origine.
   (c) On considère la droite du plan complexe passant par les points $A(1)$ et $B(i)$.
      i. Soit $z = a + ib$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que le point $M(z)$ appartient à la droite (AB) si et seulement si $b = 1 - a$.
      ii. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $M(z) \in (AB)$. Montrer que la distance entre $M'(f(z))$ et $C\left(\dfrac{1-i}{2}\right)$ est constante égale à $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.
      iii. Conclure en donnant l'image par f de la droite (AB).

   La question précédente n'était qu'un exemple, mais elle se généralise et on peut démontrer que l'image d'une droite ne passant pas par l'origine est un cercle passant l'origine.

5. **Image d'un cercle.**
   (a) Quelle est l'image par f du cercle de centre O et de rayon $r \in \mathbb{R}_+^*$?
   (b) Soit D un point d'affixe z_D. On note $\mathcal{C}_D$ le cercle de centre z_D et de rayon $r \in \mathbb{R}_+^*$.
      i. Montrer que le point M d'affixe z appartient à $\mathcal{C}_D$ si et seulement si $|z - z_D|^2 = r^2$.
      ii. En déduire que le point M d'affixe z appartient à $\mathcal{C}_D$ si et seulement si $z\bar{z} - z_D\bar{z} - \overline{z_D}z + |z_D|^2 - r^2 = 0$.
      iii. On suppose ici que $r = |z_D|$, c'est-à-dire que $\mathcal{C}$ passe par l'origine du repère.
      Démontrer que l'image par f de $\mathcal{C}$ est une droite.
      iv. On suppose ici que $r \neq |z_D|$, c'est-à-dire que $\mathcal{C}$ ne passe pas par l'origine du repère.
      Démontrer que l'image par f de $\mathcal{C}$ est un cercle.

Dans cette partie, nous avons démontré que l'inversion préserve l'ensemble constitué des cercles et des droites. C'est plus généralement le cas pour les homographies mais c'est plus difficile à démontrer.

D-Exemples d'homographies

Le but de cette partie est d'illustrer la notion d'homographie à l'aide de trois exemples.

On considère les ensembles suivants :

$$U = \{z \in \mathbb{C},\quad |z| = 1\},\qquad P = \{z \in \mathbb{C},\quad Im(z) > 0\}\ \text{ et }\ D = \{z \in \mathbb{C},\quad |z| < 1\}$$

1. Dans cette question, on pose $h : z \mapsto i\,\dfrac{1+z}{1-z}$.
   (a) Montrer que h est une homographie et donner son ensemble de définition.
   (b) Montrer que : $\forall z \in U \setminus \{1\},\ h(z) \in \mathbb{R}$.
   (c) Montrer que : $\forall z \in D$, $h(z) \in P$.
   (d) Déterminer les nombres complexes z tels que $h(z) = z$. On les donnera sous forme algébrique.
2. Dans cette question, on pose $g : z \mapsto \dfrac{z-i}{z+i}$.
   (a) Montrer que g est une homographie et donner son ensemble de définition.
   (b) Montrer que : $\forall z \in \mathbb{R}$, $g(z) \in U$.
   (c) Montrer que : $\forall z \in P$, $g(z) \in D$.
3. Dans cette question, on pose $f : z \mapsto -i\,\dfrac{z-2i}{z+4i}$.
   (a) Montrer que f est une homographie et donner son ensemble de définition.
   (b) Déterminer le lieu géométrique des points M d'affixe z tels que $f(z)$ soit réel. On pourra, par exemple, examiner un argument de $f(z)$.
   (c) Déterminer le lieu géométrique des points M d'affixe z tels qu'un argument de $f(z)$ soit égal à $\dfrac{\pi}{2}$.

E-Le birapport

Soient A, B, C et D des points distincts du plan complexe d'affixes respectives a, b, c et d des complexes.
On définit le birapport de A, B, C et D par :

$$[A : B : C : D] = \frac{a-c}{a-d} \times \frac{b-d}{b-c}$$

Il faut comprendre que $[A : B : C : D]$ n'est qu'une nouvelle notation qui désigne le produit ci-dessus.
On utilisera également $[a : b : c : d]$, par abus de notation, pour désigner le birapport de A, B, C et D.

L'un des objectifs de cette partie est de démontrer l'équivalence suivante :

$$[A : B : C : D] \in \mathbb{R} \Leftrightarrow A, B, C \text{ et } D \text{ sont alignés ou cocycliques (situés sur un même cercle)}$$

1. **Preuve du sens indirect.**
   (a) On suppose que A, B, C et D sont alignés.
      i. Démontrer qu'il existe $u \in \mathbb{C}^*$ et $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in (\mathbb{R}^*)^4$ tels que :
      $$a - c = \alpha u,\ a - d = \beta u,\ b - d = \gamma u \text{ et } b - c = \delta u$$
      ii. En déduire que le birapport de A, B, C et D est réel.

(b) On suppose que A, B, C et D sont cocycliques. On note $\Omega(\omega)$ le centre du cercle qui contient ces points et $R \in \mathbb{R}_+^*$ son rayon.

i. Montrer qu'il existe $(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4) \in \mathbb{R}^4$ tels que :

$$a = \omega + Re^{\theta_1},\ b = \omega + Re^{i\theta_2},\ c = \omega + Re^{i\theta_3} \text{ et } d = \omega + Re^{i\theta_4}$$

ii. En déduire que le birapport de A, B, C et D est réel.

2. Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on considère la famille d'homographies $f_\theta : z \mapsto i\,\dfrac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z}$.

(a) Montrer que :

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{1\},\ z \in \mathbb{U} \Leftrightarrow f_0(z) \in \mathbb{R}$$

(b) Justifier que pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{e^{i\theta}\},\ f_\theta(z) = f_0(e^{-i\theta} z)$.

(c) En déduire que :

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{e^{i\theta}\},\ z \in \mathbb{U} \Leftrightarrow f_\theta(z) \in \mathbb{R}$$

(d) Montrer que f_0 préserve le birapport, c'est-à-dire que :

$$\forall (a,b,c,d) \in (\mathbb{C} \setminus \{1\})^4 \text{ distincts},\ [f_0(a) : f_0(b) : f_0(c) : f_0(d)] = [a : b : c : d]$$

(e) En déduire que f_θ préserve le birapport pour tout $\theta \in \mathbb{R}$.

3. **Preuve du sens direct.** On suppose ici que $[a : b : c : d] \in \mathbb{R}$ avec toujours a, b, c et d des complexes distincts.

(a) On suppose que A, B et C sont alignés. Démontrer que D appartient également à cette droite.

(b) On suppose A, B et C ne sont pas alignés.

i. Justifier qu'il existe un cercle $\mathcal{C}$ qui passe par A, B et C. On note $\Omega(\omega)$ le centre de ce cercle et $r \in \mathbb{R}_+^*$ son rayon.

ii. On note $h : z \mapsto \dfrac{z - \omega}{r}$. Montrer que :

$$\forall z \in \mathbb{C},\ z \in \mathcal{C} \Leftrightarrow h(z) \in \mathbb{U}$$

iii. Montrer que h préserve le birapport.

iv. En utilisant les homographies f_θ définies dans la question 2., en déduire que D appartient également à $\mathcal{C}$.

v. Conclure.

(c) **Une application du birapport.** Trouver tous les complexes z tels que les points d'affixes 1, z, $\dfrac{1}{z}$, $1 - z$ soient distincts et cocycliques.