Exercice

Cet exercice a pour objet l'étude d'une équation différentielle linéaire du premier ordre avec notamment plusieurs problèmes de recollement.

1. La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x(x^2-1)}$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$. Ainsi pour tout réel $x \notin \{-1, 0, 1\}$, on peut réécrire l'équation de la façon suivante :

$$(\widehat{E}) \ : \ y'(x) + \frac{2}{x(x^2-1)} y(x) = \frac{1}{x^2-1}$$

On peut alors effectuer la résolution de cette équation différentielle sur les intervalles :

$$\boxed{I_1 =]-\infty, -1[, \ I_2 =]-1, 0[, \ I_3 =]0, 1[\text{ et } I_4 =]1, +\infty[}$$

Toute la difficulté de l'exercice sera, dans un second temps, de recoller les solutions ainsi trouvées.

2. En réduisant au même dénominateur, on a :

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{x+1} + \frac{\gamma}{x-1} &= \frac{\alpha(x+1)(x-1) + \beta x(x-1) + \gamma x(x+1)}{x(x+1)(x-1)} \\
&= \frac{\alpha x^2 - \alpha + \beta x^2 - \beta x + \gamma x^2 + \gamma x}{x(x^2-1)} \\
&= \frac{(\alpha+\beta+\gamma)x^2 + (\gamma-\beta)x - \alpha}{x(x^2-1)}
\end{aligned}$$

Puisque l'on veut que cette fraction soit égale à $\dfrac{2}{x(x^2-1)}$, on obtient, en identifiant, le système :

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \gamma - \beta = 0 \\ -\alpha = 2 \end{cases}$$

On résout sans difficulté ce système pour trouver $\alpha = -2$, $\beta = 1$ et $\gamma = 1$.
Finalement pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$, on a :

$$\boxed{\frac{2}{x(x^2-1)} = -\frac{2}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1}}$$

Une telle écriture s'appelle une décomposition en éléments simples de la fraction $\dfrac{2}{x(x^2-1)}$. *Nous verrons plus tard dans l'année des méthodes plus efficaces pour effectuer ce type de décomposition.*

3. Notons I l'un des intervalles I_1, I_2, I_3 ou I_4 et effectuons la résolution de l'équation homogène sur I.
D'après la question précédente, on pose :

$$\begin{array}{rccl} a & : & I & \to \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto -\dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{x-1} \end{array}$$

La fonction a est continue sur I et une primitive de a sur I est la fonction :

$$\begin{array}{rcll} A & : & I & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & -2\ln(|x|)+\ln(|x+1|)+\ln(|x-1|) \end{array}$$

Ainsi les solutions de l'équation homogène sur l'intervalle I sont les fonctions :

$$y_\lambda : x \mapsto \lambda e^{2\ln(|x|)-\ln(|x+1|)-\ln(|x-1|)}$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$.
En simplifiant, on obtient l'ensemble des solutions de l'équation homogène :

$$\mathcal{S}_H = \left\{ y_\lambda : x \mapsto \frac{\lambda |x|^2}{|x+1||x-1|},\ \text{où } \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

Quitte à changer λ en $-\lambda$, on peut omettre les valeurs absolues puisque les fonctions mises en jeu ne changent pas de signe sur I, d'où :

$$\boxed{\mathcal{S}_H = \left\{ y_\lambda : x \mapsto \frac{\lambda x^2}{x^2-1},\ \text{où } \lambda \in \mathbb{R} \right\}}$$

4. Il n'y a pas de solution évidente, on va employer la méthode de la variation de la constante. Tous les calculs qui suivent sont valables pour tout $x \in I$. On cherche une solution particulière sous la forme :

$$y_0 : x \mapsto \frac{\lambda(x)x^2}{x^2-1}$$

où λ est une fonction dérivable sur I, ainsi y_0 est également dérivable sur I. On a :

$$y_0' : x \mapsto \frac{(\lambda'(x)x^2 + 2\lambda(x)x)(x^2-1) - 2\lambda(x)x^3}{(x^2-1)^2} = \frac{\lambda'(x)x^2(x^2-1) - 2\lambda(x)x}{(x^2-1)^2}$$

On a pour tout $x \in I$:

$$\begin{aligned} y_0 \text{ solution de } (\widehat{E}) \text{ sur } I \quad & \Leftrightarrow \quad y_0'(x) + \frac{2}{x(x^2-1)}y_0(x) = \frac{1}{x^2-1} \\ & \Leftrightarrow \quad \frac{\lambda'(x)x^2(x^2-1) - 2\lambda(x)x}{(x^2-1)^2} + \frac{2}{x(x^2-1)}\frac{\lambda(x)x^2}{x^2-1} = \frac{1}{x^2-1} \\ & \Leftrightarrow \quad \frac{\lambda'(x)x^2(x^2-1)}{(x^2-1)^2} = \frac{1}{x^2-1} \\ & \Leftrightarrow \quad \lambda'(x)x^2 = 1 \\ & \Leftrightarrow \quad \lambda'(x) = \frac{1}{x^2} \end{aligned}$$

Choisissons $\lambda : x \mapsto -\dfrac{1}{x}$ de telle sorte que :

$$y_0 : x \mapsto -\frac{x}{x^2-1}$$

En ajoutant les solutions de l'équation homogène, on obtient l'ensemble des solutions de (E) sur l'intervalle I :

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{ y : x \mapsto \frac{\lambda x^2 - x}{x^2-1},\ \text{où } \lambda \in \mathbb{R} \right\}}$$

5. (a) L'objet de cette question est l'étude du recollement au point $x = 0$. On procède comme d'habitude par analyse-synthèse.

▶ **Analyse.** Supposons avoir trouvé une fonction f définie et dérivable sur $]-1,1[$ solution de (E) sur $]-1,1[$. En particulier f est solution de (E) sur $]-1,0[$ et $]0,1[$ donc s'écrit de la façon suivante :

$$f \ : \ ]-1,1[\ \to \ \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} \dfrac{\lambda x^2 - x}{x^2-1} & \text{si} \quad x \in]-1,0[\\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \\ \dfrac{\mu x^2 - x}{x^2-1} & \text{si} \quad x \in]0,1[\end{cases}$$

La valeur en 0 se trouvant en évaluant en $x = 0$ l'équation (E), les constantes $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ étant à déterminer afin que f soit dérivable.

• <u>Etude de la continuité :</u>

La fonction f est clairement continue sur $]-1,0[$ et $]0,1[$, étudions plus spécifiquement la continuité en 0. On a :

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\lambda x^2 - x}{x^2-1} = 0 = f(0) \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{\mu x^2 - x}{x^2-1} = 0 = f(0)$$

Ainsi quelques soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ la fonction f est continue sur $]-1,1[$.

• <u>Etude de la dérivabilité :</u>

La fonction f est clairement dérivable sur $]-1,0[$ et $]0,1[$, étudions plus spécifiquement la dérivabilité en 0. Pour cela étudions les limites des taux de variations en 0^- et 0^+ :

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{\lambda h - 1}{h^2-1} = 1$$

et de même :

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\mu h - 1}{h^2-1} = 1$$

Ainsi sans condition sur $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, la fonction f est dérivable sur $]-1,1[$.

▶ **Synthèse.**

On considère la fonction :

$$f \ : \ ]-1,1[\ \to \ \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} \dfrac{\lambda x^2 - x}{x^2-1} & \text{si} \quad x \in]-1,0[\\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \\ \dfrac{\mu x^2 - x}{x^2-1} & \text{si} \quad x \in]0,1[\end{cases}$$

où $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

Cette fonction est solution de (E) sur $]-1,1[$ et dérivable, d'après l'étude précédente, sur $]-1,1[$.

L'ensemble des solutions de (E) sur $]-1,1[$ est :

$$\boxed{\mathcal{S}_{]-1,1[} = \left\{ \begin{array}{rcl} f :]-1,1[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \left\{ \begin{array}{ccc} \dfrac{\lambda x^2 - x}{x^2-1} & \text{si} & x \in]-1,0[\\ 0 & \text{si} & x = 0 \\ \dfrac{\mu x^2 - x}{x^2-1} & \text{si} & x \in]0,1[\end{array} \right. \end{array} , (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}}$$

(b) La méthode est la même qu'à la question précédente, ici on étudie le raccordement au point $x = -1$. On procède par analyse-synthèse.

▶ **Analyse.** Supposons avoir trouvé une fonction h définie et dérivable sur $]-\infty,0[$ solution de (E) sur $]-\infty,0[$. En particulier h est solution de (E) sur $]-\infty,-1[$ et $]-1,0[$ donc s'écrit de la façon suivante :

$$\begin{array}{rcl} h :]-\infty,0[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \left\{ \begin{array}{ccc} \dfrac{\lambda x^2 - x}{x^2-1} & \text{si} & x < -1 \\ -\dfrac{1}{2} & \text{si} & x = -1 \\ \dfrac{\mu x^2 - x}{x^2-1} & \text{si} & x \in]-1,0[\end{array} \right. \end{array}$$

La valeur en -1 se trouvant en évaluant en $x = -1$ l'équation (E), les constantes $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ étant à déterminer afin que h soit dérivable.

• <u>Etude de la continuité :</u>

La fonction h est clairement continue sur $]-\infty,-1[$ et $]-1,0[$, étudions plus spécifiquement la continuité en -1. On a :

$$\lim_{x\to -1^-} h(x) = \lim_{x\to -1^-} \frac{\lambda x^2 - x}{x^2-1}.$$

Le dénominateur tend vers 0, ainsi pour que la fraction ait une limite finie il faut que le numérateur tende aussi vers 0 quand x tend vers -1^-. Or le numérateur tend vers $\lambda + 1$ quand x tend vers -1^-. Cela impose $\lambda = -1$. Dans ce cas :

$$\lim_{x\to -1^-} \frac{-x^2 - x}{x^2-1} = \lim_{x\to -1^-} \frac{x}{1-x} = -\frac{1}{2} = h(-1)$$

En appliquant exactement le même raisonnement quand x tend vers -1 par valeurs supérieures, on trouve la condition $\mu = -1$.

En résumé si la fonction h est continue sur $]-\infty,0[$ alors elle s'écrit en simplifiant :

$$\begin{array}{rcl} h :]-\infty,0[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{x}{1-x} \end{array}$$

• <u>Etude de la dérivabilité :</u>

Avec l'écriture précédente, il est clair que h est dérivable sur $]-\infty,0[$.

▶ **Synthèse.**
L'unique solution de l'équation (E) sur $]-\infty, 0[$ est, d'après l'étude précédente, la fonction :

$$\boxed{\begin{array}{rccc} h & : &]-\infty,0[& \rightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \dfrac{x}{1-x} \end{array}}$$

(c) La méthode est la même qu'à la question précédente, ici on étudie le raccordement au point $x = 1$. On procède par analyse-synthèse.

▶ **Analyse.** Supposons avoir trouvé une fonction g définie et dérivable sur $]0, +\infty[$ solution de (E) sur $]0, +\infty[$. En particulier g est solution de (E) sur $]0, 1[$ et $]1, +\infty[$ donc s'écrit de la façon suivante :

$$\begin{array}{rcccc} g & : &]0,+\infty[& \rightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \begin{cases} \dfrac{\lambda x^2 - x}{x^2-1} & \text{si} \quad x \in]0,1[\\[2ex] \dfrac{1}{2} & \text{si} \quad x = 1 \\[2ex] \dfrac{\mu x^2 - x}{x^2-1} & \text{si} \quad x > 1 \end{cases} \end{array}$$

La valeur en 1 se trouvant en évaluant en $x = 1$ l'équation (E), les constantes $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ étant à déterminer afin que g soit dérivable.

- Etude de la continuité :

La fonction g est clairement continue sur $]0, 1[$ et $]1, +\infty[$, étudions plus spécifiquement la continuité en 1. On a :

$$\lim_{x \to 1^-} g(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{\lambda x^2 - x}{x^2 - 1}.$$

Le dénominateur tend vers 0, ainsi pour que la fraction ait une limite finie il faut que le numérateur tende aussi vers 0 quand x tend vers 1^-. Or le numérateur tend vers $\lambda - 1$ quand x tend vers 1^-. Cela impose $\lambda = 1$. Dans ce cas :

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{x^2 - x}{x^2 - 1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{x}{x+1} = \frac{1}{2} = g(1)$$

En appliquant exactement le même raisonnement quand x tend vers 1 par valeurs supérieures, on trouve la condition $\mu = 1$.

En résumé si la fonction g est continue sur $]0, +\infty[$ alors elle s'écrit en simplifiant :

$$\begin{array}{rcccc} g & : &]0,+\infty[& \rightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \dfrac{x}{x+1} \end{array}$$

- Etude de la dérivabilité :

Avec l'écriture précédente, il est clair que g est dérivable sur $]0, +\infty[$.

▶ **Synthèse.**
L'unique solution de l'équation (E) sur $]0, +\infty[$ est, d'après l'étude précédente, la fonction :

$$\boxed{\begin{array}{rcccc} g & : &]0,+\infty[& \rightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \dfrac{x}{x+1} \end{array}}$$

(d) On a fait tout le travail dans les questions précédentes. Une solution de l'équation (E) sur $\mathbb{R}$ est en particulier solution de (E) sur $]-\infty,0[$ et sur $]0,+\infty[$, d'après les deux questions précédentes elle s'écrit :

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} \dfrac{x}{1-x} & \text{si} \quad x<0 \\ 0 & \text{si} \quad x=0 \\ \dfrac{x}{1+x} & \text{si} \quad x>0 \end{cases}$$

D'après la question 5.(a), une telle fonction est dérivable sur $]-1,1[$ puisque cela correspond au résultat que l'on a obtenu avec $\lambda=-1$ et $\mu=1$.

Finalement, il existe une unique fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et solution de (E) sur $\mathbb{R}$ qui est en simplifiant :

$$\boxed{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{x}{1+|x|}}$$

Voici les principales fonctions mises en jeu, la solution sur $\mathbb{R}$ est notée f. Elle coïncide avec h sur $]-\infty,0]$ et avec g sur $[0,+\infty[$, puisqu'il s'agit d'après l'étude précédente du raccordement sur $\mathbb{R}$ de ces deux fonctions.