1 ♡★ Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on considère la relation binaire :

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x^3 - y^3 = 3(x - y)$$

1. Démontrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$ donner le cardinal de $\mathrm{Cl}(x)$.

Corrigé :

1. On démontre sans difficulté que la relation $\mathcal{R}$ est réflexive, symétrique et transitive.

$$\boxed{\mathcal{R} \text{ est une relation d'équivalence}}$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} y \in \mathrm{Cl}(x) &\Leftrightarrow x\mathcal{R}y \\ &\Leftrightarrow x^3 - y^3 = 3(x-y) \\ &\Leftrightarrow (x-y)(x^2 + xy + y^2) = 3(x-y) \\ &\Leftrightarrow (x-y)(y^2 + xy + x^2 - 3) = 0 \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = y \\ \text{ou} \\ y^2 + xy + x^2 - 3 = 0 \end{array} \right. \end{aligned}$$

La seconde équation est une équation de degré 2 en la variable y, son discriminant vaut $\Delta = x^2 - 4(x^2 - 3) = 3(4 - x^2)$. On doit distinguer plusieurs cas selon le signe de Δ.

• Si $|x| > 2$ alors $\Delta < 0$ et l'équation n'a pas de solution. On a alors $\mathrm{Cl}(x) = \{x\}$.

• Si $|x| = 2$ alors l'équation possède une solution double $y = -\dfrac{x}{2}$ ainsi $\mathrm{Cl}(x) = \left\{x, -\dfrac{x}{2}\right\}$ qui est de cardinal 2 car $x \neq 0$.

• Si $|x| < 2$ alors l'équation a deux solutions distinctes et on peut conclure que $\mathrm{Cl}(x)$ est de cardinal 3 sauf si x est l'une de ces solutions. Le réel x est solution de l'équation si et seulement si $3x^2 - 3 = 0$, c'est-à-dire $x = \pm 1$ dans ce cas la classe de x est de cardinal 2.

$$\boxed{\mathrm{Card}(\mathrm{Cl}(x)) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si } |x| > 2 \\ 2 & \text{si } |x| = 2 \text{ ou } x = \pm 1 \\ 3 & \text{sinon} \end{array} \right.}$$

2 ★ Soit E un ensemble ayant au moins deux éléments. On se place dans l'ensemble ordonné $(\mathcal{P}(E), \subset)$. La partie $\mathcal{P}(E) \setminus \{E\}$ admet-elle un maximum ?

Corrigé : Par l'absurde, soit $F \in \mathcal{P}(E) \setminus \{E\}$ le maximum de $\mathcal{P}(E) \setminus \{E\}$. Par hypothèse, on a : $F \neq E$ donc il existe $a \in E$ tel que $a \notin F$. On a alors $\{a\} \not\subset F$, ce qui démontre que F n'est pas majorant de $\mathcal{P}(E) \setminus \{E\}$ pour cette relation d'ordre : c'est absurde.

3 ★★ Soit E l'ensemble des applications $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$, dérivables telles que $f(0) = 1$. On pose $\mathcal{R}$ la relation binaire définie sur E par : $\forall (f, g) \in E^2$,

$$f\mathcal{R}g \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) \leq g'(x)$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre sur E.
2. Cet ordre est-il total ?
3. Montrer que : $\forall (f, g) \in E^2,\ (f\mathcal{R}g \Rightarrow f \leq g)$.
4. A t-on : $\forall (f, g) \in E^2,\ (f \leq g \Rightarrow f\mathcal{R}g)$?

Corrigé :

1. • **Réflexivité.** Soit $f \in E$, on a : $f' \leq f'$ donc $f\mathcal{R}f$.

   • **Antisymétrie.** Soient $(f,g) \in E^2$ telles que $f\mathcal{R}g$ et $g\mathcal{R}f$, c'est-à-dire $f' \leq g'$ et $g' \leq f'$. On en déduit que $f' = g'$, les fonctions f et g sont égales à une constante près (car $[0,+\infty[$ est un intervalle) mais comme $f(0) = g(0) = 1$, on obtient $f = g$.

   • **Transitivité.** Soient $(f,g,h) \in E^3$ telles que $f\mathcal{R}g$ et $g\mathcal{R}h$, c'est-à-dire $f' \leq g'$ et $g' \leq h'$. On obtient immédiatement $f' \leq h'$ ainsi $f\mathcal{R}h$.

   $$\boxed{\mathcal{R} \text{ est une relation d'ordre}}$$

2. Pour montrer que l'ordre n'est pas total, nous devons trouver des fonctions f et g de E telles que l'on n'ait ni $f' \leq g'$ ni $g' \leq f'$. C'est-à-dire que $f - g$ n'est ni croissante ni décroissante sur $[0,+\infty[$. Prenons par exemple $f : x \mapsto 1 + x$ et $g : x \mapsto 1 + x^2$ définies sur $[0,+\infty[$, on a bien f et g qui sont deux éléments de E. La fonction $f - g : x \mapsto x - x^2$ change de sens de variation sur $[0,+\infty[$ comme on le vérifie sans problème en dérivant.

   $$\boxed{\text{L'ordre n'est pas total}}$$

3. Soient $(f,g) \in E^2$ telles que $f' \leq g'$, c'est-à-dire $(f-g)' \leq 0$ en d'autres termes la fonction $f - g$ est décroissante sur $[0,+\infty[$. Or $(f-g)(0) = 1 - 1 = 0$ donc $f - g \leq 0$ sur $[0,+\infty[$, c'est-à-dire $f \leq g$.
4. Donnons un contre-exemple. Il s'agit de trouver deux fonctions f et g dérivables sur $[0,+\infty[$ telles que $f(0) = g(0) = 1$, $f \leq g$ avec pourtant $f' \leq g'$ qui n'est pas vérifié, c'est-à-dire $f' - g'$ non décroissante. On pose $f : x \mapsto 1$ et $g : x \mapsto 1 + \sin^2(x)$ définies sur $[0,+\infty[$, on a bien $f(0) = g(0) = 1$ et $f \leq g$ sur $[0,+\infty[$. Après un rapide calcul, on remarque que :

   $$f'\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 0 \text{ et } g'\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -1$$

   ce qui démontre que l'on a pas $f' \leq g'$.

$\boxed{4}$ ♡★

1. Soit $a \in \mathbb{C}^*$. Déterminer, en fonction de a, l'ensemble des nombres complexes z tels que $z^4 = a^4$.
2. On rappelle que $\mathbb{U}_{12} = \{z \in \mathbb{C},\ z^{12} = 1\}$. On définit sur $\mathbb{U}_{12}$ la relation binaire $\sim$ par :

   $$\forall (z,z') \in \mathbb{U}_{12}^2,\ (z \sim z' \Leftrightarrow z^4 = z'^4)$$

   (a) Rappeler l'écriture exponentielle des éléments de $\mathbb{U}_{12}$.
   (b) Démontrer que $\sim$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{U}_{12}$.
   (c) Décrire les classes d'équivalence.

Corrigé :

1. Soit $a \in \mathbb{C}^*$ et $z \in \mathbb{C}$, on a :

   $$z^4 = a^4 \Leftrightarrow \left(\frac{z}{a}\right)^4 = 1 \Leftrightarrow \frac{z}{a} \in \{1,-1,i,-i\} \Leftrightarrow z \in \{a,-a,ia,-ia\}$$

   $$\boxed{\forall a \in \mathbb{C}^*,\ z^4 = a^4 \Leftrightarrow z \in \{a,-a,ia,-ia\}}$$

2. (a) D'après le cours, on a : $\mathbb{U}_{12} = \{e^{2ik\pi/12},\ k \in [\![0,11]\!]\}$.

   $$\boxed{\mathbb{U}_{12} = \{e^{ik\pi/6},\ k \in [\![0,11]\!]\}}$$

   (b) On va démontrer les 3 propriétés requises pour avoir une relation d'équivalence :
   ► Soit $z \in \mathbb{U}_{12}$, on a $z \sim z$ puisque $z^4 = z^4$. La relation binaire $\sim$ est réflexive.
   ► Soient $(z,z') \in \mathbb{U}_{12}^2$, on suppose que $z \sim z'$, c'est-à-dire que $z^4 = z'^4$. On a aussi $z'^4 = z^4$ d'où $z' \sim z$. La relation binaire $\sim$ est symétrique.

► Soient $(z, z', z'') \in \mathbb{U}_{12}^3$. On a :

$$\left\{\begin{array}{l} z \sim z' \\ z' \sim z'' \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} z^4 = z'^4 \\ z'^4 = z''^4 \end{array}\right. \Rightarrow z^4 = z''^4 \Rightarrow z \sim z''$$

La relation binaire $\sim$ est transitive.

$$\boxed{\sim \text{ est une relation d'équivalence sur } \mathbb{U}_{12}}$$

C'est d'ailleurs aussi une relation d'équivalence sur $\mathbb{C}$ puisque l'on n'utilise à aucun moment que les complexes mis en jeu sont des éléments de $\mathbb{U}_{12}$.

(c) On note $z_k = e^{ik\pi/6}$ pour $k \in [\![0, 11]\!]$. On utilise dans ces calculs le résultat de la question 1. :

$$\mathrm{Cl}(z_0) = \mathrm{Cl}(1) = \{z' \in \mathbb{U}_{12},\ 1 \sim z'\} = \{z' \in \mathbb{U}_{12},\ 1 = z'^4\} = \{1, -1, i, -i\} = \{z_0, z_3, z_6, z_9\}$$

$$\mathrm{Cl}(z_1) = \mathrm{Cl}(e^{i\pi/6}) = \{z' \in \mathbb{U}_{12},\ e^{i\pi/6} \sim z'\} = \{z' \in \mathbb{U}_{12},\ (e^{i\pi/6})^4 = z'^4\} = \{e^{i\pi/6}, -e^{i\pi/6}, ie^{i\pi/6}, -ie^{i\pi/6}\}$$

En utilisant $-1 = e^{i\pi}$, $i = e^{i\pi/2}$ et $-i = e^{3i\pi/2}$, on obtient :

$$\mathrm{Cl}(z_1) = \{e^{i\pi/6}, e^{i7\pi/6}, e^{i4\pi/6}, e^{i10\pi/6}\} = \{z_1, z_4, z_7, z_{10}\}$$

Enfin :

$$\mathrm{Cl}(z_2) = \mathrm{Cl}(e^{i2\pi/6}) = \{z' \in \mathbb{U}_{12},\ (e^{i2\pi/6})^4 = z'^4\} = \{e^{i2\pi/6}, -e^{i2\pi/6}, ie^{i2\pi/6}, -ie^{i2\pi/6}\}$$

Ce qui donne après simplifications :

$$\mathrm{Cl}(z_2) = \{e^{i2\pi/6}, e^{i8\pi/6}, e^{i5\pi/6}, e^{i11\pi/6}\} = \{z_2, z_5, z_8, z_{11}\}$$

$$\boxed{\text{Pour cette relation } \mathbb{U}_{12} \text{ se partitionne en 3 classes de 4 éléments chacune}}$$