L'usage de la calculatrice est interdit. Les raisonnements présentés devront être soigneusement justifiés et détaillés, quelques points seront dédiés à la présentation, l'orthographe et la propreté de votre copie. En particulier, il vous est demandé de souligner les résultats obtenus. Il n'est pas nécessaire de répondre à l'ensemble des questions pour avoir une bonne note.

L'objectif de ce problème est d'étudier certaines suites réelles définies par la relation ($\bigstar$) *ci-dessous :*

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

où f est définie sur une partie de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Nous allons étudier différents cas, selon les propriétés de la fonction f, en les illustrant par des exemples.

A-Préliminaires

1. **Intervalle stable**.
   (a) On dit qu'un intervalle J est stable par f si et seulement si f est définie sur J et $f(J) \subset J$.
   Montrer que si J est un intervalle stable par f et $u_0 \in J$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in J$.
   (b) Soit J un intervalle borné stable par f et $u_0 \in J$, justifier que (u_n) est bornée.
   (c) Uniquement dans cette question, on considère la suite définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{u_n - 1}$.
   On pose $f : x \mapsto \dfrac{1}{x-1}$. Démontrer que l'intervalle $\left]-\infty, \dfrac{1}{2}\right]$ est stable par f. En déduire que la suite (u_n) est correctement définie.
2. **Point fixe.** On dit que $a \in \mathbb{R}$ est un point fixe de f si et seulement si $f(a) = a$.
   (a) Soit $f : I \to I$ définie et continue sur un intervalle I. On suppose que la suite (u_n) associée à f via la relation ($\bigstar$) converge vers $l \in I$, justifier que l est un point fixe de f.

   Les points fixes de f seront donc les limites potentielles de la suite (u_n). Les deux questions suivantes présentent des résultats affirmant l'existence de points fixes, sous certaines hypothèses.

   (b) Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ et $f : [a,b] \to [a,b]$ continue.
      i. Démontrer que f a un point fixe. On pourra poser $g : x \mapsto f(x) - x$.
      ii. Le résultat reste t-il vrai si l'on remplace l'intervalle $[a,b]$ par $]a,b]$?
      iii. Le résultat reste t-il vrai si l'intervalle n'est plus borné ?
   (c) Dans cette question, on se donne une fonction $f : [0,1] \to [0,1]$ croissante.
   Le but est de démontrer que f possède un point fixe. On pose $A = \{x \in [0,1],\ f(x) \geq x\}$.
      i. Montrer que A possède une borne supérieure que l'on note x_0.
      ii. Montrer que $f(x_0)$ est un majorant de A.
      iii. En déduire que x_0 est un point fixe de f.
      iv. Le résultat reste t-il vrai si l'on suppose que f est décroissante ?
3. **Cas où f est affine.** On suppose que $f : x \mapsto ax + b$ définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.
   Que dire de la suite (u_n) associée à f avec la relation ($\bigstar$) ?
   On précisera en particulier si la suite converge ou diverge selon les paramètres $u_0,\ a$ et b.

B-Cas où f est croissante

Dans cette partie, on se donne une fonction $f : I \to I$ croissante et continue avec I un intervalle réel. On note toujours (u_n) la suite associée à f via la relation ($\bigstar$).

1. **Étude générale.**

   (a) On suppose que $u_0 \leq u_1$. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_{n+1}$.

   (b) On suppose que $u_0 \geq u_1$. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq u_{n+1}$.

   (c) On pose la fonction $g : x \mapsto f(x) - x$ définie sur I.

      i. Expliquer en quoi l'étude du signe de $g(u_0)$ permet de connaitre la monotonie de (u_n).

      ii. Démontrer que si (u_n) converge vers un élément de I alors c'est vers un zéro de la fonction g.

Après ces quelques éléments de théorie, voyons à présent deux exemples.

2. Dans cette question, on pose $f : x \mapsto \dfrac{1}{4}x^2 + 1$ définie sur $\mathbb{R}_+$.

   (a) Justifier que f est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, continue et croissante.

   (b) Étudier le signe et les points d'annulation de $g : x \mapsto f(x) - x$ définie sur $\mathbb{R}_+$.

   (c) On suppose que $u_0 = 1$.

      i. Démontrer que $[0, 2]$ est stable par f, en déduire que (u_n) est bornée.

      ii. Donner le sens de variation de (u_n).

      iii. Démontrer que (u_n) tend vers 2.

   (d) On suppose que $u_0 = \dfrac{5}{2}$.

      i. Démontrer que $[2, +\infty[$ est stable par f.

      ii. Donner le sens de variation de (u_n).

      iii. Démontrer que (u_n) diverge vers $+\infty$.

3. Dans cette question, on pose $f : x \mapsto \sqrt{1+x}$ définie sur $\mathbb{R}_+$ et on prend $u_0 = 1$. On note $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

   (a) Démontrer que (u_n) est correctement définie.

   (b) Démontrer que l'intervalle $[0, \varphi]$ est stable par f.

   (c) Justifier que (u_n) est monotone.

   (d) En déduire que (u_n) tend vers φ.

C-Cas où f est décroissante

Dans cette partie, on se donne une fonction $f : I \to I$ décroissante et continue avec I un intervalle réel. On note toujours (u_n) la suite associée à f via la relation $(\bigstar)$.

1. **Étude générale.**
   (a) On pose $h = f \circ f$. Démontrer que h est bien définie sur I et que h est croissante sur I.
   (b) En déduire que les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones, de sens de variation opposés.

2. **Un exemple.** On pose la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x+5}{x+1}$ définie sur $\mathbb{R}_+$ et on prend $u_0 \in [0, \sqrt{5}]$.
   (a) Démontrer que (u_n) est bien définie.
   (b) Démontrer que f est décroissante sur $\mathbb{R}_+$.
   (c) Étudier le signe et les points d'annulation de la fonction $g : x \mapsto f \circ f(x) - x$.
   (d) Démontrer que $[0, \sqrt{5}]$ est stable par $f \circ f$.
   (e) En déduire que (u_{2n}) converge vers $\sqrt{5}$.
   (f) Justifier que (u_{2n+1}) converge également vers $\sqrt{5}$.
   (g) Conclure quant à la converge de (u_n).
   (h) Que se passe t-il si l'on prend à présent $u_0 \in [\sqrt{5}, +\infty[$?

D-Cas où f est lipschitzienne

Dans cette partie, on se donne une fonction $f : I \to I$ avec I un intervalle fermé. On considère $k \in [0, 1[$ et suppose que f est k-lipschitzienne, c'est-à-dire que :

$$\forall (x, y) \in I^2,\ |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$$

La suite (u_n) est toujours associée à la fonction f avec $u_0 \in I$.

1. **Étude générale.**
   (a) Démontrer que f est continue sur I.
   (b) i. Soit $a \in I$ un point fixe de f, démontrer que :

   $$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - a| \leq k^n |u_0 - a|$$

   ii. En déduire que (u_n) converge vers a.
   iii. Justifier alors que si f possède un point fixe sur I alors celui-ci est unique.

   D'après l'exercice du DM10, nous savons de plus que cet unique point fixe existe.

2. **Un exemple.** On se donne la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{2+x}$ définie sur $\mathbb{R}_+$ et l'on prend $u_0 \in \mathbb{R}_+$.
   (a) Justifier que (u_n) est bien définie.
   (b) Démontrer que f est lipschitzienne sur $\mathbb{R}_+$ avec $k = \dfrac{1}{4}$.
   (c) En déduire que (u_n) converge et donner sa limite.

E-Cas où f est une homographie

Dans cette partie, on se donne une fonction $f : x \mapsto \dfrac{ax+b}{cx+d}$ *avec* $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ *et* $(c,d) \neq (0,0)$.
On note toujours (u_n) *la suite associée à* f.

1. **Existence de la suite (u_n).** Il n'est pas toujours évident de prévoir si la suite (u_n) est correctement définie, pour illustrer ce phénomène, prenons un exemple.

   Uniquement dans cette question, on considère $f : x \mapsto \dfrac{x+1}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$.

   (a) Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}^*$ vers $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ et préciser f^{-1}.

   (b) On pose $x_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = f^{-1}(x_n)$.

      i. Justifier que si $u_0 = x_0$ ou $u_0 = x_1$ la suite (u_n) n'est pas définie.

      ii. Plus généralement, démontrer que (u_n) n'est pas bien définie si et seulement si il existe $k \in \mathbb{N}$, $u_0 = x_k$.

   Dans toute la suite de cette partie, on suppose que u_0 *est choisi de telle sorte que la suite* (u_n) *soit bien définie.*

2. Uniquement dans cette question, on suppose que $ad - bc = 0$, démontrer que (u_n) est constante à partir du rang 1.

3. On suppose ici que $c = 0$. Que dire de la suite (u_n) ?

   Dans la suite de cette partie, on suppose que $ad - bc \neq 0$ *et* $c \neq 0$.

4. Montrer que si (u_n) est convergente de limite $l \in \mathbb{R}$ alors :
$$cl^2 + (d-a)l - b = 0 \qquad (E)$$
   On note $\Delta = (d-a)^2 + 4bc$.

5. Dans cette question, on suppose que $\Delta > 0$ et on note α et β les deux solutions réelles de l'équation (E).

   (a) Montrer que si $u_0 \in \{\alpha, \beta\}$ alors la suite est constante.

   (b) On suppose désormais que $u_0 \notin \{\alpha, \beta\}$ et on pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{u_n - \alpha}{u_n - \beta}$.

      i. Démontrer que (v_n) est géométrique de raison $q = \dfrac{c\beta + d}{c\alpha + d}$.

      ii. Etudier la convergence ou la divergence de (u_n) selon les valeurs de q.

      iii. Expliciter (u_n) en fonction de n, α, β et u_0.

6. Dans cette question, on suppose que $\Delta = 0$ et on note α la solution réelle de (E).

   (a) Expliciter α et vérifier que $c\alpha + d = a - c\alpha$.

   (b) Que se passe t-il si $u_0 = \alpha$?

   (c) On suppose désormais que $u_0 \neq \alpha$. On pose $v_n = \dfrac{1}{u_n - \alpha}$ et $r = \dfrac{2c}{a+d}$.

      i. Montrer que (v_n) est arithmétique de raison r.

      ii. En déduire la limite de (u_n).

      iii. Expliciter (u_n) en fonction de n, α et u_0.

   Le cas où $\Delta < 0$ *est plus délicat et ne sera pas étudié dans ce devoir.*

7. **Un exemple.** Étudier la limite de la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{u_n + 2}$.