Exercice 1

Les questions 1. et 2. constituent le théorème de Cesàro, c'est un grand classique en classes préparatoires.

1. (a) Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, comme la suite (u_n) tend vers 0, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $|u_n| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$.
Ainsi pour $n \geq n_0$, en utilisant l'inégalité triangulaire, on a :

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=n_0}^{n} u_k\right| \leq \frac{1}{n}\sum_{k=n_0}^{n} |u_k| = \frac{1}{n}\sum_{k=n_0}^{n} \frac{\varepsilon}{2} = \frac{n-n_0+1}{n} \times \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

La dernière inégalité étant justifiée par le fait que $\dfrac{n-n_0+1}{n} \leq 1$ puisque $n \geq n_0 \geq 1$.

$$\boxed{\exists n_0 \in \mathbb{N}^*,\ \forall n \geq n_0,\ \left|\frac{1}{n}\sum_{k=n_0}^{n} u_k\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}}$$

(b) L'entier n_0 étant fixé dans la question précédente, l'expression $\displaystyle\sum_{k=1}^{n_0-1} u_k$ est constante, notons-là A. La suite $\left(\dfrac{A}{n}\right)_{n\geq 1}$ tend vers 0, ainsi, il existe $n_1 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geq n_1$: $\left|\dfrac{A}{n}\right| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$. Ce qui démontre exactement que :

$$\boxed{\exists n_1 \in \mathbb{N}^*,\ \forall n \geq n_1,\ \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n_0-1} u_k\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}}$$

(c) Il s'agit de faire le bilan des deux questions précédentes, si l'on prend $N = \max(n_0, n_1)$, on a pour $n \geq N$:

$$|v_n| = \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k\right| = \left|\frac{1}{n}\Big(\sum_{k=1}^{n_0-1} u_k + \sum_{k=n_0}^{n} u_k\Big)\right| \leq \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n_0-1} u_k\right| + \left|\frac{1}{n}\sum_{k=n_0}^{n} u_k\right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Ceci en utilisant l'inégalité triangulaire et les résultats des deux questions précédentes.
On a démontré que :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ |v_n| \leq \varepsilon$$

$$\boxed{(v_n) \text{ tend vers } 0}$$

2. Soit (u_n) une suite réelle qui tend vers $l \in \mathbb{R}$, on pose $\widehat{u_n} = u_n - l$. La suite $(\widehat{u_n})$ tend vers 0. Pour tout $n \geq 1$, on pose :

$$\widehat{v_n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \widehat{u_n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} (u_n - l) = \Big(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_n\Big) - l$$

La suite $(\widehat{v_n})$ tend vers 0 puisque, d'après la question précédente, la suite $(\widehat{u_n})$ tend vers 0. Ainsi $\left(\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_n\right)$ est une suite qui tend vers l. Ce qui démontre le théorème de Cesàro.
Pour donner un contre-exemple à la réciproque, on pose pour tout $n \geq 1$: $u_n = (-1)^n$, la suite (v_n) associée est :

$$v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} (-1)^k = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad n \text{ est pair} \\ -\dfrac{1}{n} & \text{si} \quad n \text{ est impair} \end{cases}$$

Il est clair que (v_n) tend vers 0 tandis que (u_n) ne converge pas, ceci démontre que la réciproque du théorème de Cesàro est fausse.

3. On suppose que la suite (u_n) tend vers $+\infty$. Soit $A \in \mathbb{R}$, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geq N$, $u_n \geq A+1$. Pour tout $n \geq N$, on a :

$$v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N-1} u_k + \frac{1}{n}\sum_{k=N}^{n} u_k \geq \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N-1} u_k}_{(1)} + \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{k=N}^{n} u_k}_{(2)}$$

L'expression (1) tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ puisque c'est le produit d'une constante avec une suite qui tend vers 0, ainsi il existe $N' \geq N$ tel que pour tout $n \geq N'$, $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N-1} u_k \geq -\frac{1}{2}$.

On peut également minorer l'expression (2) :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=N}^{n} u_k \geq \frac{1}{n}\sum_{k=N}^{n}(A+1) = \frac{n-N+1}{n}(A+1) = (A+1) + \underbrace{\frac{-N+1}{n}(A+1)}_{(3)}$$

L'expression (3) tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, ainsi il existe $N'' \geq N$ tel que pour tout $n \geq N''$: $\frac{-N+1}{n}(A+1) \geq -\frac{1}{2}$.

En remettant toutes les minorations obtenues bout à bout, on a pour tout $n \geq \max(N, N', N'')$:

$$v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k \geq -\frac{1}{2} + (A+1) - \frac{1}{2} = A$$

C'est la définition de (v_n) tend vers $+\infty$.

$$\boxed{\text{Si } (u_n) \text{ tend vers } +\infty \text{ alors } (v_n) \text{ tend vers } +\infty}$$

4. (a) Pour $n \geq 1$, on considère la suite $w_n = u_{n+1} - u_n$. D'après l'hypothèse de la question, (w_n) tend vers l. En appliquant le théorème de Cesàro cela signifie que la suite $\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} w_k\right)$ tend également vers l. Or pour tout $n \geq 1$, on a :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} w_k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(u_{k+1} - u_k) = \frac{1}{n}\Big(u_{n+1} - u_1\Big)$$

Ce qui démontre que $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{n} = l$. Ici, on a un petit problème d'indice puisque l'on souhaitait avoir $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n} = l$. On peut contourner ce problème en écrivant que pour tout $n \geq 1$:

$$\frac{u_{n+1}}{n+1} = \frac{u_{n+1}}{n} \times \underbrace{\frac{n}{n+1}}_{\to 1}$$

Ainsi $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n} = l$ et comme $l \neq 0$, on peut en conclure que :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{nl} = 1}$$

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la suite $t_n = \ln(u_n)$ qui est bien définie puisque la suite (u_n) est à termes strictement positifs. On a $t_{n+1} - t_n = \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(l)$. En utilisant les calculs faits dans la question précédente cela implique que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{t_n}{n} = \ln(l)$. C'est-à-dire que la suite $\left(\frac{1}{n}\ln(u_n)\right)$tend vers $\ln(l)$ ce qui est équivalent à dire que la suite $\left(\ln(u_n^{\frac{1}{n}})\right)$ tend vers $\ln(l)$ ou encore que :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n^{\frac{1}{n}} = l}$$

(c) Pour tout $n \geq 1$, on pose $u_n = \prod\limits_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)$ de telle sorte que $w_n = u_n^{\frac{1}{n}}$.

On a :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 + \frac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

D'après la question précédente, qui s'applique puisque (u_n) est bien une suite à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, on a :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{n}} = 1}$$

(d) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \frac{n!}{n^n}$ qui est bien une suite à termes strictement positifs. On a :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)!n^n}{n!(n+1)^{n+1}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}$$

Or, comme nous l'avons déjà démontré en cours, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = e^{-1}$. D'après la question 4.(b), on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n^{\frac{1}{n}} = e^{-1}$. C'est-à-dire :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{(n!)^{\frac{1}{n}}}{n} = e^{-1}}$$

Exercice 2

1. La fonction f est définie sur l'intervalle I, afin de pouvoir calculer $f(u_n)$ à chaque étape, nous allons démontrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathcal{H}_n \ : \ u_n \in I$$

• **Initialisation.** D'après l'hypothèse de l'énoncé $u_0 \in I$.

• **Hérédité.** On suppose que, pour n fixé, $u_n \in I$. On a $u_{n+1} = f(u_n) \in I$ puisque f est à valeurs dans I. Ce qui achève la récurrence.

$$\boxed{(u_n) \text{ est bien définie}}$$

2. Là aussi, une récurrence va faire l'affaire. Pour n un entier naturel, on considère l'hypothèse de récurrence :

$$\mathcal{H}_n \ : \ |u_{n+1} - u_n| \leq k^n |u_1 - u_0|$$

• **Initialisation.** La formule au rang $n = 0$ devient : $|u_1 - u_0| \leq |u_1 - u_0|$.
• **Hérédité.** On fixe un entier naturel n et l'on suppose que : $|u_{n+1} - u_n| \leq k^n |u_1 - u_0|$. D'après l'hypothèse faite sur la fonction f et en utilisant l'hypothèse de récurrence, on a :

$$|u_{n+2} - u_{n+1}| = |f(u_{n+1}) - f(u_n)| \leq k|u_{n+1} - u_n| \leq k^{n+1}|u_1 - u_0|$$

Ce qui démontre $\mathcal{H}_{n+1}$ et achève la récurrence.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - u_n| \leq k^n |u_1 - u_0|}$$

3. Le facteur $\dfrac{1}{1-k}$ qui apparaît dans la formule laisse penser que l'on va sommer les inégalités précédentes. Pour un entier naturel n, on a la somme télescopique : $u_n - u_0 = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1}(u_{i+1} - u_i)$. Pour tout entier naturel n, en utilisant l'inégalité triangulaire et la question précédente, on a :

$$|u_n - u_0| = \Big|\sum_{i=0}^{n-1}(u_{i+1} - u_i)\Big| \leq \sum_{i=0}^{n-1}|u_{i+1} - u_i| \leq \sum_{i=0}^{n-1} k^i |u_1 - u_0| = \frac{1-k^n}{1-k}|u_1 - u_0|$$

Par hypothèse, on a $k \in [0,1[$ donc $k^n \in [0,1[$, ainsi $\dfrac{1-k^n}{1-k} \leq \dfrac{1}{1-k}$. Ce qui démontre que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - u_0| \leq \frac{1}{1-k}|u_1 - u_0|}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$, en utilisant l'inégalité triangulaire généralisée, on a :

$$|u_n| - |u_0| \leq |u_n - u_0| \leq \frac{1}{1-k}|u_1 - u_0| \text{ ce qui donne } |u_n| \leq |u_0| + \frac{1}{1-k}|u_1 - u_0|$$

Ceci démontre que la suite (u_n) est bornée puisque $|u_0| + \dfrac{1}{1-k}|u_1 - u_0|$ est une constante.

$$\boxed{(u_n) \text{ est bornée}}$$

Remarque. Dans cette question, nous avons utilisé le fait que si $(x_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{R}^n$ alors :

$$\Big|\sum_{i=1}^{n} x_i\Big| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

Cela se démontre par récurrence sur n à partir de l'inégalité triangulaire usuelle.

4. La suite (u_n) est une suite réelle bornée, d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe une extractrice φ telle que $(u_{\varphi(n)})$ converge vers un réel l. D'après la question 1., la suite $(u_{\varphi(n)})$ est une suite d'éléments de I. Par hypothèse, l'intervalle I est fermé, ainsi la limite de cette suite est également dans I.

$$\boxed{\text{Il existe une extractrice } \varphi \text{ telle que } (u_{\varphi(n)}) \text{ converge vers } l \in I}$$

5. Soit n un entier naturel, on a :

$$|f(l)-l| = |(f(l)-f(u_{\varphi(n)}))+(f(u_{\varphi(n)})-u_{\varphi(n)})+(u_{\varphi(n)}-l)| \leq \underbrace{|f(l)-f(u_{\varphi(n)})|}_{(1)}+\underbrace{|f(u_{\varphi(n)})-u_{\varphi(n)}|}_{(2)}+\underbrace{|u_{\varphi(n)}-l|}_{(3)}$$

Examinons chacune des quantités mises en jeu :
(1) On a : $|f(l)-f(u_{\varphi(n)})| \leq k|l-u_{\varphi(n)}|$ d'après la propriété sur la fonction f.
(2) On a : $|f(u_{\varphi(n)})-u_{\varphi(n)}| = |u_{\varphi(n)+1}-u_{\varphi(n)}| \leq k^{\varphi(n)}|u_1-u_0|$ en utilisant la majoration obtenue à la question 2.
En reprenant la majoration précédente, on a :

$$|f(l)-l| \leq k|l-u_{\varphi(n)}| + k^{\varphi(n)}|u_1-u_0| + |l-u_{\varphi(n)}| = \underbrace{(k+1)|l-u_{\varphi(n)}|}_{(A)} + \underbrace{k^{\varphi(n)}|u_1-u_0|}_{(B)} \quad (\bigstar)$$

Les quantités A et B tendent vers 0 car :
(A) $\lim\limits_{n\to+\infty}(k+1)|l-u_{\varphi(n)}| = 0$ puisque $(u_{\varphi(n)})$ tend vers l et $k+1$ est une constante.
(B) $\lim\limits_{n\to+\infty} k^{\varphi(n)}|u_1-u_0| = 0$ puisque $k \in [0,1[$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\varphi(n) = +\infty$, la quantité $|u_1-u_0|$ étant fixée.
Finalement en passant à la limite dans l'inégalité $(\bigstar)$, on obtient $|f(l)-l| \leq 0$, c'est-à-dire $f(l) = l$.

$$\boxed{l \text{ est un point fixe de } f}$$

6. Démontrons la propriété annoncée par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$\mathcal{H}_n \ : \quad |u_n - l| \leq k^n|u_0-l|$$

• **Initialisation.** Si $n=0$, l'inégalité devient $|u_0-l| \leq |u_0-l|$, ce qui démontre que $\mathcal{H}_0$ est vraie.
• **Hérédité.** On suppose $\mathcal{H}_n$ vérifiée pour un entier naturel n fixé. En utilisant le fait que $f(l)=l$, la propriété de la fonction f et l'hypothèse de récurrence, on a :

$$|u_{n+1}-l| = |f(u_n)-f(l)| \leq k|u_n-l| \leq k \times k^n|u_0-l| = k^{n+1}|u_0-l|$$

Ce qui achève la récurrence et démontre que $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n-l| \leq k^n|u_0-l|}$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} k^n|u_0-l| = 0$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} k^n = 0$ puisque $k \in [0,1[$. Ceci démontre que :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = l}$$

7. À ce stade de l'étude, nous avons démontré le théorème annoncé, excepté le fait que le point fixe est unique. Supposons que $(l,m) \in I^2$ soient deux points fixes de f, on a :

$$|l-m| = |f(l)-f(m)| \leq k|l-m| < |l-m| \text{ car } k<1$$

Ce qui démontre que $l=m$.

$$\boxed{f \text{ possède un unique point fixe}}$$

Ce théorème est utilisé pour trouver une valeur approchée d'un point fixe de f, en calculant quelques termes de la suite (u_n). Une fonction vérifiant la condition de l'énoncé est appelée une fonction k-lipschitzienne, nous verrons plus tard dans l'année comment en trouver.