1-On pose $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = 5u_n + 1$.
Déterminer l'expression de u_n en fonction de n.

2-La suite $u_n = \cos\left(\left(n + \frac{1}{n}\right)\pi\right)$ converge t-elle ?

3-Que dire d'une suite bornée qui ne possède qu'une seule valeur d'adhérence ?

1-On pose $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = 5u_n + 1$.
Déterminer l'expression de u_n en fonction de n.

Réponse : On applique la méthode vue en cours en cherchant une suite constante comme solution. Pour $l \in \mathbb{R}$, on a :

$$l = 5l + 1 \Leftrightarrow l = -\frac{1}{4}$$

Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n = \lambda 5^n - \dfrac{1}{4}$. La condition initiale nous permet de trouver $\lambda = \dfrac{9}{4}$.

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ u_n = \frac{9}{4} \times 5^n - \frac{1}{4}$$

2-La suite $u_n = \cos\left(\left(n + \frac{1}{n}\right)\pi\right)$ converge t-elle ?

Réponse : On examine les suites extraites :

$$u_{2n} = \cos\left(\left(2n + \frac{1}{2n}\right)\pi\right) = \cos\left(\frac{1}{2n}\pi\right)$$

On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} = 1$.
D'autre part :

$$u_{2n+1} = \cos\left(\left(2n+1+\frac{1}{2n+1}\right)\pi\right) = \cos\left(\pi+\frac{1}{2n+1}\pi\right) = -\cos\left(\frac{1}{2n+1}\pi\right)$$

On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1} = -1$. La suite (u_n) diverge.

3-Que dire d'une suite bornée qui ne possède qu'une seule valeur d'adhérence ?

Réponse : Une telle suite va converger vers sa seule valeur d'adhérence. Notons (u_n) la suite et l l'unique valeur d'adhérence et supposons par l'absurde que (u_n) ne converge pas :

$$\exists \varepsilon > 0,\ \forall n_0 \in \mathbb{N},\ \exists n \geq n_0,\ |u_n - l| > \varepsilon$$

Ce qui signifie qu'il existe une infinité d'indices n tels que $u_n \notin [l-\varepsilon, l+\varepsilon]$, cet infinité d'indices peut se ranger dans une extractrice φ. Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N},\ u_{\varphi(n)} \notin [l-\varepsilon, l+\varepsilon]$. La suite $(u_{\varphi(n)})$ est bornée car (u_n) l'est, il existe une suite extraite de $(u_{\varphi(n)})$ qui converge vers un réel différent de l. Cette nouvelle suite extraite est également extraite de (u_n), ainsi (u_n) possède une autre valeur d'adhérence de l, ce qui est absurde.