

1. Vrai ou faux : tout nombre complexe possède exactement deux racines carrées.
2. Quelles sont les racines carrées de $2i$?
3. Quels sont les deux racines carrées de $-\pi$?
4. Vrai ou faux : une équation polynomiale de degré 3 a toujours 3 solutions complexes.
5. Justifier qu'une équation polynomiale de degré 3 ne peut pas avoir strictement plus de 3 solutions.
6. Trouver de tête les solutions de $(E) : 2z^2 + (8 + 4i)z + 16i = 0$

1. Vrai ou faux : tout nombre complexe possède exactement deux racines carrées.

Réponse : C'est faux, 0 n'a qu'une seule racine carrée : 0.

2. Quelles sont les racines carrées de $2i$?

Réponse : On cherche $z = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $z^2 = 2i$. On obtient les trois équations :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ 2xy = 2 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$$

Ce qui nous donne $z = 1 + i$ ou $z = -1 - i$.

3. Quels sont les deux racines carrées de $-\pi$?

Réponse : Il y a deux racines carrées :

$$i\sqrt{\pi} \text{ et } -i\sqrt{\pi}$$

4. Vrai ou faux : une équation polynomiale de degré 3 a toujours 3 solutions complexes.

Réponse : C'est faux, l'équation de degré 3 : $z^3 = 0$ n'a clairement qu'une solution : 0.

5. Justifier qu'une équation polynomiale de degré 3 ne peut pas avoir strictement plus de 3 solutions.

Réponse : S'il y avait 4 solutions, z_1 , z_2 , z_3 et z_4 , on pourrait factoriser le polynôme de degré 3 par $(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)(z - z_4)$. C'est impossible pour des raisons de degré.

6. Trouver de tête les solutions de $(E) : 2z^2 + (8 + 4i)z + 16i = 0$

Réponse : La somme des solutions vaut $-\frac{b}{a} = -4 - 2i$ et le produit vaut $\frac{c}{a} = 8i$. Ainsi les deux solutions sont :

$$z_1 = -4 \text{ et } z_2 = -2i$$