1-Vrai ou faux : une fonction affine $x \mapsto ax + b$ est lipschitzienne de coefficient $k = a$.

2-La fonction partie entière définie sur $\mathbb{R}$ est-elle lipschitzienne ?

3-Démontrer que la fonction sin définie sur $\mathbb{R}$ est 1-lipschitzienne en utilisant la définition.

4-Démontrer que la fonction $x \mapsto x^2$ définie sur $\mathbb{R}$ n'est pas lipschitzienne en utilisant la définition.

5-La fonction tan est-elle uniformément continue sur $[-1, 1]$?

6-Soit $f \in \mathcal{C}^1([a, b])$, montrer que f est lipschitzienne.

7-Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$, démontrer avec que la fonction $x \mapsto x^2$ est uniformément continue sur $[0, a]$ de trois manières différentes.

8-Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin(x^2)$. Trouver deux suites réelles (x_n) et (y_n) telles que : $x_n - y_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $f(x_n) - f(y_n) = 1$. En déduire que f n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

1-Vrai ou faux : une fonction affine $f : x \mapsto ax + b$ est lipschitzienne de coefficient $k = a$.

Réponse : C'est clairement faux si a est négatif. Plus précisément, une fonction affine est lipschitzienne de coefficient $|a|$ car :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ |f(x) - f(y)| = |ax + b - (ay + b)| = |a(x - y)| = |a||x - y|$$

On peut aussi dire que $|f'|$ est bornée par $|a|$ ce qui permet de conclure.

2-La fonction partie entière définie sur $\mathbb{R}$ est-elle lipschitzienne ?

Réponse : Non, car elle n'est pas continue sur $\mathbb{R}$.

3-Démontrer que la fonction sin définie sur $\mathbb{R}$ est 1-lipschitzienne.

Réponse : Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$|\sin(x) - \sin(y)| = \left|2\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\right| \leq 2\left|\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\right|$$

Or pour tout $u \in \mathbb{R}$, $|\sin(u)| \leq |u|$. Finalement :

$$|\sin(x) - \sin(y)| \leq 2\left|\frac{x-y}{2}\right| = |x-y|$$

La fonction sin est 1-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.

4-Démontrer que la fonction $x \mapsto x^2$ définie sur $\mathbb{R}$ n'est pas lipschitzienne.

Réponse : Par l'absurde, supposons qu'il existe $k \in \mathbb{R}_+$ tel que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |x^2 - y^2| \leq k|x-y|$$

En particulier pour $y = 0$, on a : $|x^2| \leq k|x|$. Pour $x > 0$, on obtient :

$$|x| \leq k$$

C'est contradictoire car $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$.

5-La fonction tan est-elle uniformément continue sur $[-1, 1]$?

Réponse : La fonction tan est continue sur $[-1, 1]$ d'après le théorème de Heine, elle est uniformément continue.

6-Soit $f \in \mathcal{C}^1([a,b])$, montrer que f est lipschitzienne.

Réponse : Une fonction de classe C^1 sur $[a,b]$ est continue, dérivable et de dérivée continue. Ainsi f' est continue sur le segment $[a,b]$ donc f' est bornée :

$$\exists k \in \mathbb{R}_+,\ \forall x \in [a,b],\ |f'(x)| \leq k$$

D'après le cours, on sait alors que f est k-lipschitzienne.

7-Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$, démontrer que la fonction $x \mapsto x^2$ est uniformément continue sur $[0, a]$.

Réponse : 1) **Avec la définition.** Soit $\varepsilon > 0$, on cherche $\alpha > 0$ tel que :

$$\forall (x, y) \in [0, 1]^2,\ |x - y| \leq \alpha \Rightarrow |x^2 - y^2| \leq \varepsilon$$

On a : $|x^2 - y^2| = |x + y||x - y| \leq 2a|x - y|$, ainsi en choisissant $\alpha = \dfrac{\varepsilon}{2a}$, on obtient :

$$|x - y| \leq \alpha \Rightarrow |x^2 - y^2| \leq 2a|x - y| \leq 2a \times \frac{\varepsilon}{2a} = \varepsilon$$

On a vérifié la définition de la continuité uniforme de $x \mapsto x^2$ sur $[0, a]$.

2) Cette fonction est continue sur le segment $[0, a]$ donc uniformément continue d'après le théorème de Heine.

3) La fonction est lipschitzienne car sa dérivée $x \mapsto 2x$ est bornée par $2a$ sur $[0, a]$. Or une fonction lipschitzienne est uniformément continue.

8-Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin(x^2)$. Trouver deux suites réelles (x_n) et (y_n) telles que $x_n - y_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $f(x_n) - f(y_n) = 1$. En déduire que f n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Réponse : Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $x_n = \sqrt{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}$ et $y_n = \sqrt{2\pi n}$. On a :

$$x_n - y_n = \frac{\frac{\pi}{2}}{\sqrt{\frac{\pi}{2} + 2\pi n} + \sqrt{2\pi n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

On a : $f(x_n) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) = 1$ et $f(y_n) = \sin(2\pi n) = 0$, ce qui répond à la condition de l'énoncé puisque : $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) - f(y_n) = 1$.

Par l'absurde, si f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$ alors :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ |x - y| \leq \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

Prenons $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$, comme $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} x_n - y_n = 0$:

$$\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ |x_n - y_n| \leq \alpha$$

ainsi : $|f(x_n) - f(y_n)| \leq \dfrac{1}{2}$. C'est contradictoire car pour tout entier naturel n, $f(x_n) - f(y_n) = 1$.

La fonction f n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$.