1-Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k$.

2-Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} n$.

3-Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 3$.

4-Soit $n \geq 2$ un entier naturel. Calculer : $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} 3^k$.

5-★ Soit $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}$.

1-Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer : $\sum_{k=1}^{n} k$.

Réponse : On a :

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

1-Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer : $\sum_{k=1}^{n} k$.

Réponse : On a :

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

• Formule à connaitre : somme des termes d'une suite arithmétique.

1-Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer : $\sum_{k=1}^{n} k$.

Réponse : On a :

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

- Formule à connaitre : somme des termes d'une suite arithmétique.
- Récurrence.

1-Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer : $\sum_{k=1}^{n} k$.

Réponse : On a :

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

- Formule à connaitre : somme des termes d'une suite arithmétique.
- Récurrence.
- En renversant la somme.

Notons $S = \sum_{k=1}^{n} k$. On a :

$$\begin{aligned} 2S &= \sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=0}^{n} k \\ &= \sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=0}^{n} (n-k) \\ &= \sum_{k=0}^{n} n \\ &= (n+1) \times n \end{aligned}$$

En divisant par 2, on retrouve :

$$S = \frac{n(n+1)}{2}$$

2-Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} n$.

Réponse : Les termes que l'on somme ne dépendent pas de l'indice k donc :

$$\sum_{k=1}^{n} n = n \times n = n^2$$

3-Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 3$.

Réponse : Comme il y a $n+1$ termes dans la somme, on a :

$$\sum_{k=0}^{n} 3 = 3(n+1)$$

4-Soit $n \geq 2$ un entiers naturel. Calculer : $\sum_{k=2}^{n} 3^k$.

Réponse : On reconnait la somme des termes d'une suite géométrique de raison 3 :

$$\sum_{k=2}^{n} 3^k = 3^2 \times \frac{3^{n-1} - 1}{3 - 1} = \frac{9}{2}\left(3^{n-1} - 1\right)$$

5-★ Soit $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}$.

5-★ Soit $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}$.

Réponse : On multiplie et on divise par la quantité conjuguée :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{k+1-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right) \\
&= \sqrt{n+1}-1
\end{aligned}$$