

A-Calculs de base

1. Soit $n \in \mathbb{N}$, donner le signe de $u_n = -\frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2}$.
2. On pose $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n}$. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = \frac{F_{n+2}}{F_{n+1}}$ où (F_n) désigne (bien sûr !) la suite de Fibonacci.
3. Écrire à l'aide notamment d'une factorielle le produit des entiers pairs de 2 à $2n$ où $n \in \mathbb{N}^*$.
4. Déterminer l'ensemble de définition et le signe de la fonction $x \mapsto \frac{x^3 - 1}{x^3 + 1}$.

B-Sommes et produits

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, simplifier $\prod_{k=1}^n \frac{k}{k+2}$.
6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, simplifier $\sum_{k=4}^{n+3} (2k+1)$.
7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, simplifier $\sum_{k=1}^n 3^{2k-1}$.
8. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, simplifier $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 5^{n-k}$.
9. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, calculer : $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$.

C-Limites

10. Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{Arctan}(x)}{x}$.
11. Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\text{Arccos}(x)}{x}$.
12. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 4x + 3} + x + 2$.
13. Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + 4x + 3} + x + 2$.
14. Déterminer $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + x^2 + 5}{5x^3 - x^2 + 2}$.
15. Déterminer $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x^2 - 5x + 4}$.
16. ★ Déterminer $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\frac{1}{x}} \sqrt{x(x+2)} + x$.

D-Équations et inéquations

17. Trouver tous les x réels tels que : $|x+5| \leq 100$.
18. Trouver tous les x réels tels que : $|2x| - |2x+2| + |x+3| \leq 3$.
19. Trouver tous les x réels vérifiant : $\frac{x-1}{x+1} < \frac{2x+1}{2x}$.
20. Trouver les réels x vérifiant l'équation : $\sqrt{x^2+3} + \sqrt{x-3} - \sqrt{-x^2+3x-2} = 4$.
21. Résoudre l'équation $x^6 + x^4 = 80$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+$.

E-Fonctions usuelles

22. Donner la valeur de $\operatorname{Arcsin}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.
23. Trouver tous les réels x tels que $e^x + 3e^{-x} = 4$.
24. Simplifier $\operatorname{Arccos}\left(\cos\left(\frac{13\pi}{3}\right)\right)$.
25. ★ Trouver tous les réels x vérifiant $\ln(1 + x\operatorname{th}(x)) = x$.
26. ★ Résoudre l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R} : \operatorname{Arcsin}(x) + \operatorname{Arcsin}(\sqrt{15}x) = \frac{\pi}{2}$.

F-Trigonométrie

27. Trouver tous les réels x vérifiant l'équation (E) : $\cos(2x) + \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 0$.
28. Trouver tous les réels x tels que : $\cos(x) + \cos(2x) + \cos(3x) + \cos(4x) = 0$.
29. Trouver tous les réels x tels que : $\cos(x) + \sqrt{3}\sin(x) = 1$.
30. Trouver tous les réels x tels que : $\left|\cos\left(3x - \frac{\pi}{3}\right)\right| \geq \frac{1}{2}$.

G-Dérivation

31. Donner l'ensemble de dérivabilité et la dérivée de $f : x \mapsto \frac{1}{x^{\frac{3}{4}}}$.
32. Donner l'ensemble de dérivabilité et dériver la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}}$.
33. Soit $f : x \mapsto \operatorname{Arcsin}(\sqrt{x}) - \frac{1}{2}\operatorname{Arcsin}(2x - 1)$. Déterminer l'ensemble de définition et de dérivabilité de f . Calculer f' et en déduire une simplification de f .

H-Intégration

34. Déterminer une primitive sur un ensemble à préciser de $f : t \mapsto \frac{12t^3 + 6t + 12}{(t^4 + t^2 + 4t + 6)^6}$.
35. Déterminer une primitive sur un ensemble à préciser de $f : t \mapsto (4t + 2)(t^2 + t + 4)^{\frac{5}{2}}$.
36. Déterminer une primitive de $f : x \mapsto e^x \cos(x)$ à l'aide des nombres complexes.
37. Déterminer une primitive sur un ensemble à préciser de $f : t \mapsto \frac{1}{2 + \sin(t)^2}$.
38. Déterminer une primitive de $f : t \mapsto \frac{1}{t^2 + 3t + 4}$.
39. ★ Déterminer une primitive sur un ensemble à préciser de $f : t \mapsto \frac{\operatorname{th}(t)}{\operatorname{ch}(t) + 1}$.

I-Équations différentielles

40. Trouver toutes les fonctions de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ solutions de : (E) : $xy'(x) + y(x) = \operatorname{Arctan}(x)$.
41. Résoudre sur $\mathbb{R} : (E) : y'' + y = 2\cos^2(x)$.

J-Nombres complexes

42. Trouver tous les $z \in \mathbb{C}$ tels que $z^2 - 2iz + 4 - 12i = 0$.
43. Donner une écriture exponentielle de $z_1 = 2\sqrt{6}(1 + i)$ et $z_2 = \sqrt{2}(1 + i\sqrt{3})$.
44. Calculer $\prod_{1 \leq i < j \leq 4} (x_j - x_i)$ avec $x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = i$ et $x_4 = -i$.
45. ★ Montrer qu'il est impossible de trouver $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\left(\frac{2+i}{2-i}\right)^n = 1$.