1-Démontrer que l'équation $e^{-x} = x^2$ admet au moins une solution réelle.

2-Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et J un intervalle réel. Est-il vrai que $f^{-1}(J)$ est un intervalle ?

3-Étudier la continuité en tout point de $\mathbb{R}$ de : $f : x \mapsto \lfloor -x \rfloor$.

4-Étudier la continuité de :

$$\begin{array}{rccl} f & : & [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \begin{cases} \dfrac{1}{\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array}$$

1-Démontrer que l'équation $e^{-x} = x^2$ admet au moins une solution réelle.

Réponse : On pose $f : x \mapsto e^{-x} - x^2$ qui est continue sur $\mathbb{R}$. On a :

$$f(0) = 1 \geq 0 \text{ et } f(1) = e^{-1} - 1 \leq 0$$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, f s'annule au moins une fois sur $[0, 1]$.

2-Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et J un intervalle réel. Est-il vrai que $f^{-1}(J)$ est un intervalle ?

Réponse : La fonction $f : x \mapsto x^2$ est continue sur $\mathbb{R}$. On a $f^{-1}([1,4]) = [-2,-1] \cup [1,2]$ qui n'est pas un intervalle.

3-Étudier la continuité en tout point de $\mathbb{R}$ de : $f : x \mapsto \lfloor -x \rfloor$.

Réponse : La fonction f est continue en tout point de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ comme composée de la fonction partie entière et $x \mapsto -x$ qui sont continues respectivement sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ et $\mathbb{R}$. Soit $k \in \mathbb{Z}$, quand x tend vers k à gauche, on a $-x$ qui tend vers $-k$ à droite :

$$\lim_{x \to k^-} f(x) = -k = f(k) \ : \ f \text{ est continue à gauche en } k$$

Quand x tend vers k à droite, on a $-x$ qui tend vers $-k$ à gauche :

$$\lim_{x \to k^+} f(x) = -k - 1 \neq -k = f(k) \ : \ f \text{ n'est pas continue à droite en } k$$

3-Étudier la continuité de :

$$f : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} \dfrac{1}{\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Réponse : • Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \left]\dfrac{1}{n+1}, \dfrac{1}{n}\right[$, on a : $\dfrac{1}{x} \in]n, n+1[$. Sur l'intervalle $]n, n+1[$ la fonction partie entière est continue ainsi f est continue sur $\left]\dfrac{1}{n+1}, \dfrac{1}{n}\right[$ comme composée de fonctions continues.

- La fonction f est continue en 1 car $\lim_{x \to 1^-} f(x) = 1 = f(1)$.

- Soit $n \geq 2$, la fonction f n'est pas continue en $\frac{1}{n}$ car :

$$\lim_{x \to \frac{1}{n}^-} f(x) = \frac{1}{n} \neq \frac{1}{n-1} = \lim_{x \to \frac{1}{n}^+} f(x)$$

- Enfin, la fonction f est continue en 0 car : $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} \lfloor x \rfloor = +\infty$ ce qui permet d'affirmer que :

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0 = f(0)$$