L'usage de la calculatrice est interdit. Les raisonnements présentés devront être soigneusement justifiés et détaillés, quelques points seront dédiés à la présentation, l'orthographe et la propreté de votre copie. En particulier, il vous est demandé de souligner les résultats obtenus. Il n'est pas nécessaire de répondre à l'ensemble des questions pour avoir une bonne note.

Échauffement

Les questions suivantes sont indépendantes.

1. On considère l'application :
$$f \; : \; \begin{array}{rcl} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C}^* \\ z & \mapsto & e^z \end{array}$$
   (a) Rappeler la définition de l'exponentielle complexe.
   (b) Démontrer que f est surjective.
   (c) Démontrer que f n'est pas injective.
2. Soient A, B et C trois parties d'un ensemble E. Démontrer que :
$$\left\{ \begin{array}{l} (A \cap C) \subset (B \cap C) \\ (A \setminus C) \subset (B \setminus C) \end{array} \right. \Longleftrightarrow A \subset B$$
3. Soient A, B, C et D trois parties d'un ensemble E. Démontrer que :
$$A \cap B = C \cap D \Longrightarrow (A \cup (B \cap C)) \cap (A \cup (B \cap D)) = A$$
4. Dire, en le justifiant, si les propositions suivantes sont vraies ou fausses. La notation E désigne un ensemble quelconque.
   (a) Une application qui n'est pas injective est surjective.
   (b) L'application $f \; : \; \begin{array}{rcl} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & z^2 \end{array}$ est surjective.
   (c) La restriction d'une injection est une injection.
   (d) Si deux applications f et g de E dans E ne sont pas bijectives, alors $g \circ f$ n'est pas bijective.
5. Soit E un ensemble, $f : E \to E$ et $g : E \to E$ deux applications. Montrer que si $f \circ g \circ f$ est bijective alors g est bijective.

Exercice 1

Le but de ce problème est d'étudier les solutions sur $I = [0,1]$ de l'équation différentielle linéaire d'ordre 4 avec conditions initiales :

$$(E) : \begin{cases} y^{(4)} + 2ay'' + y = 0 \\ y(0) = y(1) = y''(0) = y''(1) = 0 \end{cases}$$

où a est un réel vérifiant $a > 1$ et $y^{(4)}$ désigne la dérivée quatrième de la fonction y. Dans ce problème les fonctions recherchées sont à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1. Résoudre, en discutant du signe du paramètre réel b, l'équation différentielle : $y'' + by = 0$.
2. Déterminer l'ensemble des réels b pour lesquels le problème avec conditions initiales suivant :

$$\begin{cases} y'' + by = 0 \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases}$$

   admet une solution non nulle. On précisera dans ce cas les solutions non nulles.
3. Soit y une fonction 4 fois dérivable sur I et $z = y'' + uy$ où $u \in \mathbb{R}$. Trouver $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ tels que :
   z est solution de $z'' + vz = 0$ si et seulement si y est solution de $y^{(4)} + 2ay'' + y = 0$.
4. Dans cette question, on considère les valeurs de u et v trouvées à la question précédente afin que l'équivalence soit vérifiée.
   (a) Montrer que $u = k^2\pi^2$ ou $v = k^2\pi^2$ avec $k \in \mathbb{Z}^*$ si et seulement si $a = \dfrac{1 + k^4\pi^4}{2k^2\pi^2}$.
   (b) On suppose que pour tout $k \in \mathbb{Z}^*,\ a \neq \dfrac{1 + k^4\pi^4}{2k^2\pi^2}$. Montrer que l'équation avec conditions initiales (E) n'a pas d'autre solution que la fonction nulle.
   (c) On suppose qu'il existe $k \in \mathbb{Z}^*$ tel que $a = \dfrac{1 + k^4\pi^4}{2k^2\pi^2}$. Résoudre (E).

Exercice 2

On introduit les trois sous-ensembles de $\mathbb{C}$ suivants :

$$U = \{z \in \mathbb{C},\ \ |z| = 1\}, \quad P = \{z \in \mathbb{C},\ \ Im(z) > 0\} \ \text{ et } \ D = \{z \in \mathbb{C},\ \ |z| < 1\}$$

On appelle homographie toute application définie sur $\mathbb{C} \setminus \left\{ -\dfrac{d}{c} \right\}$ par $z \mapsto \dfrac{az+b}{cz+d}$ où a, b, c et d sont des nombres complexes tels que : $ad - bc \neq 0$.

On considère les trois applications suivantes :

$$f : z \mapsto -i\frac{z-2i}{z+4i}, \qquad g : z \mapsto \frac{z-i}{z+i} \qquad \text{et} \qquad h : z \mapsto i\frac{1+z}{1-z}$$

1. Vérifier que f, g et h sont des homographies.
2. Montrer que : $\forall z \in U \setminus \{1\}$, $h(z) \in \mathbb{R}$.
3. Montrer que : $\forall z \in D$, $h(z) \in P$.
4. Déterminer les nombres complexes z tels que : $h(z) = z$; on les donnera sous forme algébrique.
5. Déterminer les nombres complexes Z qui ont au moins un antécédent par h. Justifier que h induit une bijection de $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ vers $\mathbb{C} \setminus \{-i\}$. Donner sa bijection réciproque.
6. Montrer que : $\forall z \in \mathbb{R}$, $g(z) \in U$.
7. Montrer que : $\forall z \in P$, $g(z) \in D$.
8. Déterminer le lieu géométrique des points M d'affixe z tels que $f(z)$ soit réel. On pourra, par exemple, examiner un argument de $f(z)$.
9. Déterminer le lieu géométrique des points M d'affixe z tels qu'un argument de $f(z)$ soit égal à $\dfrac{\pi}{2}$.

Exercice 3

Soit E un ensemble non vide, on note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E. On dit qu'un sous-ensemble, $\mathcal{F}$, de $\mathcal{P}(E)$ est du type (Λ) si et seulement s'il vérifie les 4 propriétés suivantes :

- (Λ_1) : $\mathcal{F} \neq \emptyset$
- (Λ_2) : $\forall (X, Y) \in \mathcal{F}^2,\ X \cap Y \in \mathcal{F}$
- (Λ_3) : $\forall X \in \mathcal{F},\ \forall Y \in \mathcal{P}(E) :\ X \subset Y \Rightarrow Y \in \mathcal{F}$
- (Λ_4) : $\emptyset \notin \mathcal{F}$

On notera que $\mathcal{F}$ est bien un sous-ensemble de $\mathcal{P}(E)$ et non un élément de $\mathcal{P}(E)$. En d'autres termes, $\mathcal{F}$ est un ensemble dont les éléments sont des parties de E.

On appelle cardinal d'un ensemble fini son nombre d'éléments. Le cardinal de l'ensemble E se note $\mathrm{Card}(E)$.

1. Dans cette question uniquement, on prend $E = \{a, b, c\}$.
   (a) Expliciter $\mathcal{P}(E)$.
   (b) Les parties suivantes de $\mathcal{P}(E)$ sont-elles du type (Λ) ? Vous justifierez dans chaque cas votre réponse.
      i. $\mathcal{F}_1 = \emptyset$.
      ii. $\mathcal{F}_2 = \mathcal{P}(E)$.
      iii. $\mathcal{F}_3 = \{\{a\}, \{b, c\}\}$.
      iv. $\mathcal{F}_4 = \{\{a\}, \{a, c\}\}$.
      v. $\mathcal{F}_5 = \{\{a\}, \{a, c\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$.
   (c) Enumérer, en expliquant votre raisonnement, tous les sous-ensembles de $\mathcal{P}(E)$ du type (Λ).
2. (a) L'ensemble $\mathcal{P}(E)$ est-il du type (Λ) ?
   (b) Que dire d'un sous-ensemble de $\mathcal{P}(E)$ qui vérifie (Λ_3) mais pas (Λ_4) ?
   (c) À quelle condition sur E, l'ensemble $\mathcal{P}(E) \setminus \{\emptyset\}$ est-il du type (Λ) ?
   (d) Soit $\mathcal{F}$ un sous-ensemble de $\mathcal{P}(E)$ du type (Λ), montrer que $E \in \mathcal{F}$.
3. Soit A une partie non vide de E, on note $\mathcal{F}_A = \{X \in \mathcal{P}(E),\ A \subset X\}$. On dira alors que $\mathcal{F}_A$ est engendré par A.
   (a) Dans l'exemple de la question 1., décrire $\mathcal{F}_{\{a\}}$, $\mathcal{F}_{\{a,b\}}$ et $\mathcal{F}_{\{a,b,c\}}$.
   (b) Montrer que $\mathcal{F}_A$ est du type (Λ).
   (c) On désigne par $\mathcal{F}(E)$ l'ensemble des sous-ensembles de $\mathcal{P}(E)$ du type (Λ) et on considère l'application :
   $$\begin{array}{rcccc} \Gamma & : & \mathcal{P}(E) \setminus \{\emptyset\} & \to & \mathcal{F}(E) \\ & & A & \mapsto & \mathcal{F}_A \end{array}$$
   Montrer que Γ est injective.
4. On suppose, dans cette question, que E est un ensemble infini. On note $\mathcal{I}(E)$ l'ensemble des complémentaires des parties finies de E.
   (a) Montrer que $\mathcal{I}(E)$ est du type (Λ).
   (b) L'application Γ est-elle surjective ?
5. Soit $\mathcal{F}$ un sous-ensemble de $\mathcal{P}(E)$ du type (Λ), on suppose dans cette question que l'un des éléments de $\mathcal{F}$ est une partie finie de E.
   (a) Justifier l'existence d'un élément de $\mathcal{F}$ de cardinal minimal, on le note A.
   (b) Montrer que $\mathcal{F}$ est engendré par A.
   (c) Dans le cas où E est un ensemble fini non vide, montrer que Γ est une bijection.
   (d) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et E un ensemble de cardinal n. Quel est le nombre de sous-ensembles de $\mathcal{P}(E)$ du type (Λ) ?