1-Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que f' possède n zéros, peut-on en déduire que f possède $n+1$ zéros ?

2-À l'aide du T.A.F, déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x})$.

3-Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ dérivable. Est-il vrai que :

$$f \text{ à valeurs dans } \mathbb{R} \Leftrightarrow f' \text{ à valeurs dans } \mathbb{R}$$

4-Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $n \geq 2$. Montrer que la fonction $f : x \mapsto x^n + ax + b$ admet au plus 3 zéros réels.

5-Soit f continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que f s'annule $n+1$ fois sur $\mathbb{R}$. Démontrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $f' + \alpha f$ s'annule n fois sur $\mathbb{R}$.

1-Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que f' possède n zéros, peut-on en déduire que f possède $n+1$ zéros ?

Réponse : C'est faux, la fonction $x \mapsto x^2 + 1$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, pourtant sa dérivée $x \mapsto 2x$ s'annule en 0.

2-À l'aide du T.A.F, déterminer $\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x})$.

Réponse : Soit $x \geq 1$, on applique le T.A.F à la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ qui est continue et dérivable sur $[x, x+1]$. Il existe $c_x \in]x, x+1[$ tel que :

$$\frac{1}{2\sqrt{c_x}} = \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{x+1-x} = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$$

On a $c_x \geq x$ donc $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{2\sqrt{c_x}} = 0$ d'où :

$$\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) = 0$$

3-Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ dérivable. Est-il vrai que :

$$f \text{ à valeurs dans } \mathbb{R} \Leftrightarrow f' \text{ à valeurs dans } \mathbb{R}$$

Réponse : L'implication " $\Rightarrow$ " est évidente, si f est à valeurs dans $\mathbb{R}$ alors f' est à valeurs dans $\mathbb{R}$. La réciproque est fausse, la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : t \mapsto i$ a sa dérivée à valeurs dans $\mathbb{R}$.

4-Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $n \geq 2$. Montrer que la fonction $f : x \mapsto x^n + ax + b$ admet au plus 3 zéros réels.

Réponse : Par l'absurde, on se donne $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$ quatre zéros de f. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, nous pouvons appliquer le corollaire du théorème de Rolle à f et à ses dérivées.
On a $f(a_1) = f(a_2)$, $f(a_2) = f(a_3)$ et $f(a_3) = f(a_4)$, on en déduit qu'il existe $(b_1, b_2, b_3) \in]a_1, a_2[\times]a_2, a_3[\times]a_3, a_4[$ tels que

$$f'(b_1) = f'(b_2) = f'(b_3) = 0$$

De même, il existe $(c_1, c_2) \in]b_1, b_2[\times]b_2, b_3[$ tels que :

$$f''(c_1) = f''(c_2) = 0$$

Or $f'' : x \mapsto n(n-1)x^{n-2}$ ne s'annule pas si $n = 2$ et s'annule uniquement en 0 si $n \geq 3$, d'où l'absurdité.

5-Soit f continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que f s'annule $n+1$ fois sur $\mathbb{R}$. Démontrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $f' + \alpha f$ s'annule n fois sur $\mathbb{R}$.

Réponse : On pose $g : x \mapsto f(x)e^{\alpha x}$. La fonction g est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ car f l'est. Par hypothèse g s'annule $n+1$ fois sur $\mathbb{R}$ comme f s'annule $n+1$ fois. D'après le corollaire du théorème de Rolle, g' s'annule n fois sur $\mathbb{R}$. Or :

$$g' : x \mapsto f'(x)e^{\alpha x} + \alpha f(x)e^{\alpha x} = (f'(x) + \alpha f(x))e^{\alpha x}$$

On en déduit que $f' + \alpha f$ s'annule n fois sur $\mathbb{R}$.