

Le but de cet exercice est de démontrer une formule datant de 1995 et due au mathématicien canadien Simon Plouffe :

$$\pi = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{16^n} \left(\frac{4}{8n+1} - \frac{2}{8n+4} - \frac{1}{8n+5} - \frac{1}{8n+6} \right)$$

Simon Plouffe est un mathématicien canadien contemporain. Il a enseigné l'informatique au lycée Clemenceau et à l'IUT Informatique de Nantes. Il a détenu en 1977 le record du monde de mémorisation des décimales de π , il en a récité 4096. Ce record a été porté depuis à 100 000 décimales par le japonais Akira Haraguchi et nous attendons prochainement que cette performance soit battue par l'un ou l'une d'entre vous lors des Pi d'Or. La formule de l'exercice est appelée formule BBP, elle permet de calculer des décimales isolées de π en base 2 sans connaître les précédentes !

1. Intégrale d'une fonction rationnelle.

On considère l'intégrale I suivante :

$$I = \int_0^1 \frac{x^5 + x^4 + 2x^3 - 4}{x^8 - 16} dx$$

- (a) Justifier que I est bien définie.
- (b)
 - i. Donner une factorisation de $x^8 - 16$ comme un produit de quatre polynômes de degré 2 à coefficients réels.
 - ii. Factoriser $x^5 + x^4 + 2x^3 - 4$ comme un produit d'un polynôme de degré 1 et de deux polynômes de degré 2. On pourra remarquer que 1 est racine de ce polynôme.
 - iii. En déduire que pour tout $x \in [0, 1]$: $\frac{x^5 + x^4 + 2x^3 - 4}{x^8 - 16} = \frac{x-1}{(x^2-2)(x^2-2x+2)}$.
- (c) Vérifier que : $\forall x \in [0, 1], \frac{x^5 + x^4 + 2x^3 - 4}{x^8 - 16} = \frac{1}{4} \left(\frac{x}{x^2-2} - \frac{x-2}{x^2-2x+2} \right)$
- (d) En déduire que $I = \frac{\pi}{16}$.

2. Une série géométrique.

Soit $x \in [0, 1]$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose : $S_n(x) = \sum_{k=0}^n \left(\frac{x^8}{16} \right)^k$.

Démontrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x) = \frac{16}{16-x^8}$. On notera $\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{x^8}{16} \right)^k = \frac{16}{16-x^8}$.

3. La formule de Plouffe.

(a) Soit $p \in \mathbb{N}$, démontrer que :

$$\int_0^1 x^p S_n(x) dx = \int_0^1 \frac{16x^p}{16-x^8} dx - \int_0^1 \frac{x^{8n+p+8}}{16^n(16-x^8)} dx$$

(b) Justifier que pour tout $x \in [0, 1]$: $0 \leq \frac{x^{8n+p+8}}{16^n(16-x^8)} \leq \frac{1}{16^n}$.

(c) En déduire que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 x^p S_n(x) dx = \int_0^1 \frac{16x^p}{16-x^8} dx$.

(d) Établir que pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{16^k(p+8k+1)} = \int_0^1 \frac{16x^p}{16-x^8} dx$$

(e) Démontrer la formule annoncée.