# Structures algébriques

## Lois de composition interne

**1** Soit $E = \left\{ \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}^* \right\}$.

a) L'addition définit-elle une loi de composition interne sur $E$ ?

b) La multiplication définit-elle une loi de composition interne sur $E$ ?

**2** Soit $E$ un ensemble à $n$ éléments avec $n \in \mathbb{N}^*$. Combien il y-a-t-il de lois de composition interne sur $E$ ?

**3** ♡ On définit une loi de composition interne $*$ sur $\mathbb{R}$ :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ a * b = \ln(e^a + e^b)$$

Quelles sont ses propriétés ? Possède-t-elle un élément neutre ?

**4** On munit $\mathbb{R}$ des deux lois de composition interne $*$ et $T$ définies par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x * y = 2xy \text{ et } xTy = x + 2y$$

a) La loi $*$ est-elle distributive par rapport à $T$ ?

b) La loi $T$ est-elle distributive par rapport à $*$ ?

**5** ★ On considère l'ensemble $E = [\![1,9]\!]$. Pour $(a,b) \in E^2$, on note $a\#b$ le premier chiffre de $a \times b$. Étudier les propriétés de la loi de composition interne ainsi définie.

**6** ★ On munit $\mathbb{R}$ de la loi de composition interne $*$ définie par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x * y = xy + (x^2-1)(y^2-1)$$

a) Vérifier que $*$ est commutative, non associative et qu'elle possède un élément neutre.

b) Montrer que pour $a$ fixé avec $|a| > 1$, l'équation $x * a = 1$ admet 2 solutions. Conclure.

**7** ♡★ Sur $E = [0,1]$, on définit une loi $*$ par :

$$\forall (x,y) \in E^2,\ x * y = x + y - xy$$

a) Montrer que $*$ est une loi de composition interne, commutative et associative.

b) Montrer que $*$ possède un élément neutre.

c) Quels sont les éléments inversibles ? réguliers ?

**8** ★★ Soit $*$ une loi de composition interne associative sur un ensemble fini $E$ possédant un élément régulier. Montrer que $E$ possède un élément neutre.

**9** ★★ Soit $(E,*)$ un monoïde avec $E$ ensemble fini. Montrer que tout élément régulier de $E$ est inversible.

## Groupes

**10** ♡★ Soit $(G,*)$ un groupe. On définit le centre du groupe $G$ par :

$$Z(G) = \{a \in G,\ \forall x \in G,\ a * x = x * a\}$$

Montrer que $Z(G)$ est un sous-groupe de $G$.

**11** ♡★ Soit $(G,*)$ un groupe tel que :

$$\forall x \in G,\ x^2 = e$$

Montrer que $G$ est commutatif.

**12** ★ Soit $G = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ et $*$ la loi de composition interne définie sur $G$ par :

$$(x,y) * (x',y') = (xx', xy' + y)$$

a) Montrer que $(G,*)$ est un groupe non commutatif.

b) Montrer que $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ est un sous-groupe de $(G,*)$.

**13** ♡★ Sur $G = ]-1,1[$, on définit une loi $*$ par :

$$\forall (x,y) \in G^2,\ x * y = \frac{x+y}{1+xy}$$

Montrer que $(G,*)$ est un groupe abélien.

**14** ★★ Soit $G$ un groupe et $H_1, H_2$ deux sous-groupes de $G$.

a) Montrer que $H_1 \cap H_2$ est un sous-groupe de $G$.

b) Montrer que $H_1 \cup H_2$ n'est pas toujours un sous-groupe de $G$.

c) Montrer que $H_1 \cup H_2$ est un sous-groupe de $G$ si et seulement si $H_1 \subset H_2$ ou $H_2 \subset H_1$.

**15** ♡★★ Soit $G$ un groupe commutatif fini de cardinal $n$. Montrer que :

$$\forall x \in G,\ x^n = e$$

où $e$ est l'élément neutre de $G$. En déduire les sous-groupes finis de $(\mathbb{C}^*, \times)$.

**16** ★★ Soit $G$ un groupe fini. Montrer que le nombre d'éléments égaux à leur inverse a la même parité que $\mathrm{Card}(G)$.

## Morphismes de groupes

**17** Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R}^* \\ x & \mapsto & x^n \end{array}$$

Montrer que $f$ est un morphisme du groupe $(\mathbb{R}^*, \times)$.
En déterminer l'image et le noyau.

**18** ★ Déterminer tous les morphismes dérivables du groupe $(\mathbb{R}, +)$ dans le groupe $(\mathbb{C}^*, \times)$.

**19** ♡★★ Soit $G$ un groupe. Pour tout $a \in G$, on note :

$$\tau_a: \begin{array}{ccc} G & \to & G \\ x & \mapsto & axa^{-1} \end{array}$$

a) Montrer que $\tau_a$ est un morphisme du groupe $G$.

b) Montrer que $\forall (a, b) \in G^2,\ \tau_a \circ \tau_b = \tau_{ab}$.

c) Montrer que $\tau_a$ est bijective et déterminer son application réciproque.

d) En déduire que $\mathcal{A} = \{\tau_a,\ a \in G\}$ muni de la composition est un groupe.

**20** ★★ Montrer que $(\mathbb{R}^*, \times)$ et $(\mathbb{C}^*, \times)$ ne sont pas isomorphes.

**21** ★★ Soit $(G, *)$ et $(G', +)$ deux groupes et $f : G \to G'$ un morphisme de groupes.

a) Montrer que pour tout sous-groupe $H$ de $G$, $f(H)$ est un sous-groupe de $G'$.

b) Montrer que pour tout sous-groupe $H'$ de $G'$, $f^{-1}(H')$ est un sous-groupe de $G$.

## Anneaux

**22** Soit $d \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{Z}[\sqrt{d}] = \{a + b\sqrt{d},\ (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$.
Montrer que $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ est un anneau.

**23** ♡ On définit sur $\mathbb{Z}^2$ deux lois de composition interne notées $+$ et $*$ pour $(a, b, c, d) \in \mathbb{Z}^4$ :

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

$$(a, b) * (c, d) = (ac, ad + bc)$$

a) Montrer que $(\mathbb{Z}^2, +, *)$ est un anneau commutatif.

b) Montrer que $A = \{(a, 0),\ a \in \mathbb{Z}\}$ est un sous-anneau de $(\mathbb{Z}^2, +, *)$.

**24** ★ Soit $A = \left\{\frac{m}{2^n},\ m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\right\}$. Montrer que $A$ est un anneau avec les lois $+$ et $\times$ usuelles. Quels en sont les éléments inversibles ?

**25** ★★ Soit $A$ un anneau tel que :

$$\forall (a, b) \in A^2,\ (ab)^2 = a^2b^2$$

Montrer que $A$ est commutatif.

**26** ★★ Soit $E$ un ensemble non vide et $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de $E$. On pose :

$$\forall (A, B) \in \mathcal{P}(E)^2,\ A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

a) Montrer que $(\mathcal{P}(E), \Delta, \cap)$ est un anneau commutatif.

b) Montrer que cet anneau n'est pas intègre et déterminer les diviseurs de zéro.

**27** ♡★★ Soient $x$ et $y$ deux éléments d'un anneau $(A, +, *)$.

a) Montrer que si $x$ est nilpotent et que $x$ et $y$ commutent, alors $xy$ est nilpotent.

b) Montrer que si $x$ et $y$ sont nilpotents et commutent, alors $x + y$ est nilpotent.

c) Montrer que si $xy$ est nilpotent alors $yx$ l'est aussi.

d) Montrer que si $x$ est nilpotent alors $1 - x$ est inversible. Que vaut $(1 - x)^{-1}$ ?

## Corps

**28** ★ a) Démontrer que $A = \{a + b\sqrt{2},\ (a, b) \in \mathbb{Q}^2\}$ est un corps.
b) Démontrer que $B = \{a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3},\ (a, b, c) \in \mathbb{Q}^3\}$ n'est pas un corps.

**29** ♡★★ Soit $A$ un anneau intègre fini. Montrer que $A$ est un corps.

**30** ★★★ Soit $(K, +, \times)$ un corps fini. Calculer le produit des éléments inversibles de $K$.

## Défis

**D1** ★★★ Soit $E$ un ensemble fini non vide muni d'une loi de composition interne associative notée $*$.
Montrer qu'il existe $a \in E$ tel que $a * a = a$.

**D2** ★★★ Montrer que :

$$H = \{x + \sqrt{3}y,\ x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{Z}, x^2 - 3y^2 = 1\}$$

est un sous-groupe de $(\mathbb{R}_+^*, \times)$.