Exercice : L'anneau $\mathbb{Z}[j]$

On note $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et on considère l'ensemble :

$$\mathbb{Z}[j] = \{a + bj,\ (a,b) \in \mathbb{Z}^2\}$$

1. (a) Justifier que $1 + j + j^2 = 0$ et donner l'écriture algébrique de j.

   (b) Soit $z \in \mathbb{Z}[j]$, démontrer que z s'écrit de façon unique sous la forme $a + bj$ avec $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$.

2. Démontrer que $(\mathbb{Z}[j], +, \times)$ est un anneau commutatif où $+$ et $\times$ sont l'addition et la multiplication usuelles sur les nombres complexes.

3. Soit $z = a + bj$ avec $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$. On note $N(z) = |z|^2$.

   (a) Démontrer que $N(z) \in \mathbb{N}$.

   (b) Démontrer que z est un inversible de l'anneau $\mathbb{Z}[j]$ si et seulement si $N(z) = 1$.

   (c) En déduire les inversibles de $\mathbb{Z}[j]$. On donnera également leurs inverses respectifs.

   (d) L'anneau $\mathbb{Z}[j]$ est-il un corps ?