1-Soit G un groupe et $a \in G$, quel est le noyau de l'application γ_a de G dans G définie par $\gamma_a : x \mapsto ax$?

2-L'application $f : (\mathbb{R}^3, +) \to (\mathbb{R}, +)$ définie par $f(x, y, z) = 2x + 3y - z + 1$ est-elle un morphisme de groupes ?

3-Soit G un groupe. L'application f de G dans G définie par : $f : x \mapsto x^{-1}$ est-elle un morphisme de groupes ?

4-Démontrer que la composée de deux morphismes de groupes est un morphisme de groupes.

5-Soit f un isomorphisme de groupes, démontrer que f^{-1} est également un isomorphisme.

6-Soit f un morphisme de groupes de $(\mathbb{Z}, +)$ dans lui-même, on suppose de plus que $f(1) = 1$. Expliciter f.

7-★ Soit f un morphisme d'un groupe fini $(G, \star)$ vers $(\mathbb{C}^*, \times)$. Calculer $\displaystyle\sum_{x \in G} f(x)$.

1-Soit G un groupe et $a \in G$, quel est le noyau de l'application γ_a de G dans G définie par $\gamma_a : x \mapsto ax$?

Réponse : Cette question n'a pas de sens puisque f n'est pas un morphisme de groupes. Pour tous $(x, y) \in G^2$:

$$f(xy) = axy \text{ et } f(x)f(y) = axay$$

Ce qui démontre, qu'en général, f n'est pas un morphisme de groupes.

2-L'application $f : (\mathbb{R}^3, +) \to (\mathbb{R}, +)$ définie par $f(x, y, z) = 2x + 3y - z + 1$ est-elle un morphisme de groupes ?

Réponse : On remarque que :

$$f(0, 0, 0) = 1$$

ainsi le neutre de $(\mathbb{R}^3, +)$ n'est pas envoyé sur le neutre de $(\mathbb{R}, +)$: f n'est pas un morphisme.

3-Soit G un groupe. L'application f de G dans G définie par : $f : x \mapsto x^{-1}$ est-elle un morphisme de groupe ?

Réponse : Soient $(x, y) \in G^2$, on a :

$$f(xy) = (xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$$

$$f(x)f(y) = x^{-1}y^{-1}$$

En l'absence de l'hypothèse de commutativité du groupe, on ne peut pas conclure que f est un morphisme.

4-Démontrer que la composée de deux morphismes de groupes est un morphisme de groupes.

Réponse : Soit $f : (G_1, \star_1) \to (G_2, \star_2)$ et $g : (G_2, \star_2) \to (G_3, \star_3)$. Pour tous $(x, y) \in G_1^2$, on a :

$$g(f(x \star_1 y)) = g(f(x) \star_2 f(y)) = g(f(x)) \star_3 g(f(y))$$

Ce qui démontre que $g \circ f$ est un morphisme de groupes de $(G_1, \star_1)$ dans $(G_3, \star_3)$.

5-Soit f un isomorphisme de groupes, démontrer que f^{-1} est également un isomorphisme.

Réponse : Soit $f : (G, \star) \to (G', \Delta)$ un isomorphisme. L'application f^{-1} est bien définie car f est bijective. Soient $(x', y') \in G'^2$, il existe $(x, y) \in G^2$ tels que $x' = f(x)$ et $y' = f(y)$. On a :

$$f^{-1}(x' \Delta y') = f^{-1}(f(x) \Delta f(y)) = f^{-1}(f(x \star y)) = x \star y = f^{-1}(x') \star f^{-1}(y')$$

Ce qui démontre que f^{-1} est un morphisme et donc un isomorphisme.

6-Soit f un morphisme de groupes de $(\mathbb{Z}, +)$ dans lui-même, on suppose de plus que $f(1) = 1$. Expliciter f.

Réponse : D'après la propriété de morphisme, on a :

$$f(2) = f(1+1) = f(1) + f(1) = 1 + 1 = 2$$

$$f(3) = f(1+1+1) = f(1) + f(1) + f(1) = 1 + 1 + 1 = 3$$

Par une récurrence immédiate, on démontre que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ f(n) = n$$

À présent si $n \in \mathbb{Z}$ avec $n < 0$, on a :
$f(n) = f(-(-n)) = -f(-n) = -(-n) = n$ car, par un morphisme, l'image de l'inverse est l'inverse de l'image.
Finalement f est l'identité.

7-Soit f un morphisme d'un groupe fini $(G,\star)$ vers $(\mathbb{C}^*,\times)$. Calculer $\sum_{x\in G} f(x)$.

Réponse : Il y a deux cas :

• soit f est une application constante égale à 1 et dans ce cas :

$$\sum_{x\in G} f(x) = \sum_{x\in G} 1 = \mathrm{Card}(G)$$

• soit il existe $a\in G$ tel que $f(a)\neq 1$ et dans ce cas :

$$\sum_{x\in G} f(x) = \sum_{x\in G} f(a\star x) = \sum_{x\in G} f(a)f(x) = f(a)\sum_{x\in G} f(x)$$

On en déduit que $\sum_{x\in G} f(x) = 0$.