Problème

A-Préliminaires

1. L'équation (E) est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 mais les coefficients ne sont pas constants, contrairement au contexte du cours.
2. (a) L'équation $ax+by=e$ représente une droite du plan pour tous $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ sauf si $(a,b)=(0,0)$. Un vecteur directeur a pour coordonnées $(-b,a)$.

   (b) On se place d'abord dans le cas où $(a,b)\neq(0,0)$ et $(c,d)\neq(0,0)$. Le système $(\mathcal{S})$ admet une unique solution si et seulement si les droites d'équations $ax+by=e$ et $cx+dy=f$ ne sont pas parallèles (ou confondues), c'est-à-dire si et seulement si les vecteurs directeurs $(-b,a)$ et $(-d,c)$ ne sont pas colinéaires. C'est équivalent à la condition $(-b)c-a(-d)\neq 0$, c'est-à-dire $ad-bc\neq 0$.

   Dans le cas où $(a,b)=(0,0)$, la première équation devient $e=0$. Si $e\neq 0$, le système n'a pas de solution et si $e=0$ le système est équivalent à $cx+dy=f$. Il y a deux cas à considérer, si $(c,d)\neq(0,0)$, le système aura une infinité de solutions (tous les points de la droite) et si $(c,d)=(0,0)$ soit le système est incompatible (si $f\neq 0$), soit tous les couples $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ sont solutions (si $f=0$).
   Dans ce cas, le système n'aura jamais une unique solution et on a bien $ad-bc=0$. Le cas $(c,d)=(0,0)$ est identique. Finalement :

   $$\boxed{(\mathcal{S}) \text{ a une unique solution si et seulement si } ad-bc\neq 0}$$

3. Soit $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1,0,1\}$, on réduit au même dénominateur le membre de droite :

   $$\frac{a}{x}+\frac{b}{x-1}+\frac{c}{x+1}=\frac{a(x-1)(x+1)+bx(x+1)+cx(x-1)}{x(x-1)(x+1)}=\frac{(a+b+c)x^2+(b-c)x-a}{x^3-x}$$

   On identifie avec le membre de gauche pour obtenir :

   $$\begin{cases} a+b+c=3 \\ b-c=0 \\ -a=1 \end{cases}$$

   On résout ce système sans difficulté pour obtenir $a=-1$ et $b=c=2$.

   $$\boxed{\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-1,0,1\},\ \frac{3x^2+1}{x^3-x}=-\frac{1}{x}+\frac{2}{x-1}+\frac{2}{x+1}}$$

B-Résolution de $(\mathcal{H})$

1. La fonction f_0 est dérivable deux fois sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynomiale. On a : $f_0' : x\mapsto 1$ et $f_0'' : x\mapsto 0$. On a bien :

   $$\forall x\in\mathbb{R},\ (x^2-x)f_0''(x)+(x+1)f_0'(x)-f_0(x)=0$$

   $$\boxed{f_0 \text{ est solution de } (\mathcal{H}) \text{ sur } \mathbb{R}}$$

2. (a) La fonction f est deux fois dérivable sur I comme produit de deux fonctions deux fois dérivables sur I. Pour tout $x \in I$, on a :

$$f'(x) = C'(x)(x+1) + C(x) \text{ et } f''(x) = C''(x)(x+1) + 2C'(x)$$

On a :

$$\begin{aligned}
f \text{ solution de } (\mathcal{H}) \text{ sur } I \quad &\Leftrightarrow \quad \forall x \in I,\ (x^2 - x)f''(x) + (x+1)f'(x) - f(x) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \forall x \in I,\ (x^2 - x)(C''(x)(x+1) + 2C'(x)) + (x+1)(C'(x)(x+1) + C(x)) - C(x)(x+1) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \forall x \in I,\ (x^3 - x)C''(x) + (3x^2+1)C'(x) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad C' \text{ solution sur } I \text{ de } (\mathcal{H}')\ :\ (x^3 - x)y' + (3x^2+1)y = 0
\end{aligned}$$

$$\boxed{f \text{ est solution de } (\mathcal{H}) \text{ sur } I \text{ si et seulement si } C' \text{ est solution de } (\mathcal{H}') \text{ sur } I}$$

(b) Soit $x \in \mathbb{R}$, on remarque que $x^3 - x = x(x-1)(x+1)$. Si l'on se place sur I qui est l'un des intervalles I_2, I_3, J_1 ou J_2, cette expression ne s'annule pas. Ainsi, sur I, l'équation différentielle $(\mathcal{H}')$ est équivalente à :

$$y' + \frac{3x^2+1}{x^3 - x}y = 0$$

On reconnait une équation différentielle linéaire d'ordre 1 que l'on sait résoudre. On a :

$$a : x \mapsto \frac{3x^2+1}{x^3 - x} = -\frac{1}{x} + \frac{2}{x-1} + \frac{2}{x+1}$$

d'après la question 3. de la partie A. Une primitive de a sur I est $A : x \mapsto -\ln(|x|) + 2\ln(|x-1|) + 2\ln(|x+1|)$. Les solutions de $(\mathcal{H}')$ sur I sont les fonctions :

$$x \mapsto \lambda e^{\ln(|x|) - 2\ln(|x-1|) - 2\ln(|x+1|)} = \lambda e^{\ln(|x|) - \ln(|x-1|^2) - \ln(|x+1|^2)} = \frac{\lambda|x|}{(x-1)^2(x+1)^2} = \frac{\lambda|x|}{(x^2-1)^2}$$

où λ est une constante réelle. Quitte à changer λ en $-\lambda$, puisque $x \mapsto |x|$ ne change pas de signe sur I, on a :

$$\boxed{\text{les solutions de } (\mathcal{H}') \text{ sur } I \text{ sont les fonctions } x \mapsto \frac{\lambda x}{(x^2-1)^2} \text{ où } \lambda \in \mathbb{R}}$$

(c) D'après les deux questions précédentes, on a $C' : x \mapsto \dfrac{\lambda x}{(x^2-1)^2}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. En reconnaissant une forme $\dfrac{u'}{u^2}$ qui s'intègre en $-\dfrac{1}{u}$, il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $C : x \mapsto -\dfrac{\lambda}{2(x^2-1)} + \mu$. On en déduit que les solutions de $(\mathcal{H})$ sur I sont les fonctions $x \mapsto C(x)(x+1) = -\dfrac{\lambda}{2(x-1)} + \mu(x+1)$ où λ et μ décrivent $\mathbb{R}$. Pour simplifier encore l'écriture, on peut remarquer que quand λ décrit $\mathbb{R}$, $-\dfrac{1}{2}\lambda$ décrit $\mathbb{R}$. Finalement :

$$\boxed{\text{les solutions de } (\mathcal{H}) \text{ sur } I \text{ sont les fonctions } x \mapsto \frac{\lambda}{x-1} + \mu(x+1) \text{ où } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2}$$

(d) On procède par analyse-synthèse.

Analyse. Soit f une solution de $(\mathcal{H})$ sur l'intervalle $I_1 =]-\infty, 0[$, en particulier f est solution de $(\mathcal{H})$ sur J_1 et J_2. C'est-à-dire qu'il existe $(\lambda, \mu, \lambda', \mu') \in \mathbb{R}^4$ tels que :

$$f : \begin{array}{ccl} I_1 & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} \dfrac{\lambda}{x-1} + \mu(x+1) \text{ si } x < -1 \\ \\ \dfrac{\lambda'}{x-1} + \mu'(x+1) \text{ si } -1 < x < 0 \end{cases} \end{array}$$

La valeur en -1 de f ne peut pas être trouvée uniquement à l'aide de l'équation $(\mathcal{H})$. La fonction f est dérivable deux fois sur I_1, en particulier elle est continue sur I_1. La continuité en -1 impose : $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} f(x)$, c'est-à-dire : $-\dfrac{\lambda}{2} = -\dfrac{\lambda'}{2}$. On obtient $\lambda = \lambda'$ et au passage on sait que $f(-1) = -\dfrac{\lambda}{2}$.
À ce stade, on a :

$$f : \begin{array}{ccl} I_1 & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} \dfrac{\lambda}{x-1} + \mu(x+1) \text{ si } x < -1 \\ \\ \dfrac{\lambda}{x-1} + \mu'(x+1) \text{ si } -1 < x < 0 \end{cases} \end{array}$$

La fonction f étant dérivable deux fois sur I_1, on a :

$$f' : \begin{array}{ccl} I_1 & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} -\dfrac{\lambda}{(x-1)^2} + \mu \quad \text{si } x < -1 \\ \\ -\dfrac{\lambda}{(x-1)^2} + \mu' \quad \text{si } -1 < x < 0 \end{cases} \end{array}$$

La fonction f' est dérivable sur I_1 car f est dérivable deux fois sur I_1, en particulier f' est continue sur I_1 donc continue en -1. On a ainsi :

$$\lim_{x \to -1^-} f'(x) = \lim_{x \to -1^+} f'(x) \Leftrightarrow -\frac{\lambda}{4} + \mu = -\frac{\lambda}{4} + \mu'$$

On en déduit que $\mu = \mu'$. Finalement, on obtient $f : x \mapsto \dfrac{\lambda}{x-1} + \mu(x+1)$ définie sur I_1.

Synthèse. On vérifie que la fonction f définie ci-dessus est solution de $(\mathcal{H})$ sur I_1. En effet, cette fonction est dérivable deux fois sur I_1 et :

$$f' : x \mapsto -\frac{\lambda}{(x-1)^2} + \mu \text{ et } f'' : x \mapsto \frac{2\lambda}{(x-1)^3}$$

$$\forall x \in I,\ (x^2 - x)f''(x) + (x+1)f'(x) - f(x) \ = \ (x^2 - x)\frac{2\lambda}{(x-1)^3} - (x+1)\Big(\frac{\lambda}{(x-1)^2} - \mu\Big) - \frac{\lambda}{x-1} - \mu(x+1) = 0$$

$$\boxed{\text{Les solutions de } (\mathcal{H}) \text{ sur } I_1 \text{ sont les fonctions } x \mapsto \frac{\lambda}{x-1} + \mu(x+1) \text{ où } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2}$$

(e) **Analyse.** Soit f une solution de $(\mathcal{H})$ sur $\mathbb{R}$, en particulier f est solution de $(\mathcal{H})$ sur I_1, I_2 et I_3. D'après les questions précédentes, cela signifie qu'il existe $(\lambda_1, \mu_1, \lambda_2, \mu_2, \lambda_3, \mu_3) \in \mathbb{R}^6$ tels que :

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} \dfrac{\lambda_1}{x-1} + \mu_1(x+1) \text{ si } x < 0 \\[2mm] \dfrac{\lambda_2}{x-1} + \mu_2(x+1) \text{ si } 0 < x < 1 \\[2mm] \dfrac{\lambda_3}{x-1} + \mu_3(x+1) \text{ si } x > 1 \end{cases}$$

Les valeurs de f en 0 et 1 n'étant pas directement données par l'équation.

• **Continuité en 1**. La fonction f étant dérivable deux fois sur $\mathbb{R}$, elle est en particulier continue sur $\mathbb{R}$. La continuité en 1 impose : $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ et cette limite doit être finie. Cela implique que $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$. À ce stade, on sait que la fonction f s'écrit :

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} \dfrac{\lambda_1}{x-1} + \mu_1(x+1) & \text{si } x < 0 \\[2mm] \mu_2(x+1) & \text{si } 0 < x < 1 \\[2mm] \mu_3(x+1) & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

• **Dérivabilité en 1**. On a pour tout $x \in]0,1[$, $f'(x) = \mu_2$ et pour tout $x \in]1,+\infty[$, $f'(x) = \mu_3$. La fonction f' étant dérivable, elle est continue en 1 et cela impose $\mu_2 = \mu_3$. À ce stade, on sait que la fonction f s'écrit :

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} \dfrac{\lambda_1}{x-1} + \mu_1(x+1) & \text{si } x < 0 \\[2mm] \mu_2(x+1) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

• **Continuité en 0**. La continuité de f en 0 impose $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$, cela se traduit par $-\lambda_1 + \mu_1 = \mu_2$.

• **Dérivabilité en 0**. On peut vérifier que la dérivabilité en 0 n'impose aucune condition supplémentaire sur λ_1, μ_1 et μ_2.

• **Dérivabilité seconde en 0**. Par hypothèse, la fonction f est dérivable deux fois sur $\mathbb{R}$ en particulier elle est dérivable deux fois en 0. On a :

$$f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} -\dfrac{\lambda_1}{(x-1)^2} + \mu_1 & \text{si } x < 0 \\[2mm] \mu_2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Remarquons que la fonction f' est continue en 0 car dérivable en 0 donc $f'(0) = \mu_2$. Formons le taux de variation de f' en 0. Pour $x < 0$, on a, en utilisant que $\mu_1 - \mu_2 = \lambda_1$:

$$\frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \frac{-\frac{\lambda_1}{(x-1)^2} + \mu_1 - \mu_2}{x - 0} = \frac{-\frac{\lambda_1}{(x-1)^2} + \lambda_1}{x} = \frac{\lambda_1}{(x-2)x^2}$$

Afin que ce taux de variation ait une limite en 0^-, on doit avoir $\lambda_1 = 0$ et comme $-\lambda_1 + \mu_1 = \mu_2$, on obtient $\mu_1 = \mu_2$. Finalement, on a :

$$\begin{array}{rccl} f & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \mu_2(x+1) \end{array}$$

Synthèse. La fonction $f : x \mapsto \mu(x+1)$ où $\mu \in \mathbb{R}$ est clairement solution de $(\mathcal{H})$ sur $\mathbb{R}$.

$$\boxed{\text{Les solutions de } (\mathcal{H}) \text{ sur } \mathbb{R} \text{ sont les fonctions } x \mapsto \mu(x+1) \text{ où } \mu \in \mathbb{R}}$$

C-Problème de Cauchy pour $(\mathcal{H})$

1. D'après la partie B, les solutions de $(\mathcal{H})$ sur I sont de la forme $y : x \mapsto \dfrac{\lambda}{x-1} + \mu(x+1)$ avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Pour tout $x \in I$, on a : $y'(x) = -\dfrac{\lambda}{(x-1)^2} + \mu$, ainsi :

$$\left\{ \begin{array}{l} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y'_0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\lambda}{x_0 - 1} + \mu(x_0+1) = y_0 \\ \\ -\dfrac{\lambda}{(x_0-1)^2} + \mu = y'_0 \end{array} \right.$$

Ce système admet une unique solution $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ si et seulement si $\dfrac{1}{x_0 - 1} + (x_0+1) \times \dfrac{1}{(x_0-1)^2} = \dfrac{2x_0}{(x_0-1)^2} \neq 0$ en utilisant la question 2. de la partie A. Ce qui est le cas car $x_0 \neq 0$ puisque $0 \notin I$. Les valeurs de λ et μ sont donc déterminées de façon unique ainsi il y a bien une unique solution au problème $(\mathcal{P})$.

$$\boxed{(\mathcal{P}) \text{ a une unique solution sur } I}$$

2. Les solution de $(\mathcal{H})$ sur $\mathbb{R}$ sont de la forme $f : x \mapsto \mu(x+1)$. Les conditions $f(0) = 1$ et $f'(0) = 2$ sont incompatibles car $f(0) = \mu$ et $f'(0) = \mu$.
3. Un tel problème ne peut admettre plusieurs solutions car le seul point commun à deux courbes représentatives des fonctions $x \mapsto \mu(x+1)$ où $\mu \in \mathbb{R}$ est $(-1, 0)$. Afin que le problème $(\mathcal{P})$ ait plusieurs solutions, il faut donc la condition initiale $y(-1) = 0$, la seconde condition est de la forme $y'(-1) = y'_0$ avec $y'_0 \in \mathbb{R}$. Il y a alors une unique solution $x \mapsto y'_0(x+1)$. C'est impossible que le problème $(\mathcal{P})$ possède plusieurs solutions.

D-Résolution de (E)

1. On utilise les résultats de la partie B donnant la forme des solutions de $(\mathcal{H})$ sur I. Soit f une fonction dérivable deux fois sur I, on a :

$$\begin{aligned}
f \text{ solution de } (E) \text{ sur } I \quad &\Leftrightarrow \quad \forall x \in I,\ (x^2-x)f''+(x+1)f'-f=u(x)\\
&\Leftrightarrow \quad \forall x \in I,\ (x^2-x)f''+(x+1)f'-f=(x^2-x)\varphi_0''+(x+1)\varphi_0'-\varphi_0\\
&\Leftrightarrow \quad \forall x \in I,\ (x^2-x)(f-\varphi_0)''+(x+1)(f-\varphi_0)'-(f-\varphi_0)=0\\
&\Leftrightarrow \quad f-\varphi_0 \text{ est solution de } (\mathcal{H}) \text{ sur } I\\
&\Leftrightarrow \quad \exists(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2,\ \forall x \in I,\ f(x)-\varphi_0(x)=\frac{\lambda}{x-1}+\mu(x+1)\\
&\Leftrightarrow \quad \exists(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2,\ \forall x \in I,\ f(x)=\varphi_0(x)+\frac{\lambda}{x-1}+\mu(x+1)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Les solutions de } (E) \text{ sur } I \text{ sont les fonctions } x \mapsto \varphi_0(x)+\frac{\lambda}{x-1}+\mu(x+1) \text{ où } (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2}$$

2. L'équation devient :

$$(E)\ :\ (x^2-x)y''+(x+1)y'-y=1$$

La fonction constante égale à -1 définie sur I est une solution particulière évidente.

$$\boxed{\text{Les solutions de } (E) \text{ sur } I \text{ sont de la forme : } x \mapsto -1+\frac{\lambda}{x-1}+\mu(x+1) \text{ avec } (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2}$$

La démarche sur $\mathbb{R}$ est exactement la même que précédemment, au changement des solutions de l'équation homogène près.

$$\boxed{\text{Les solutions de } (E) \text{ sur } I \text{ sont de la forme : } x \mapsto -1+\mu(x+1) \text{ avec } \mu\in\mathbb{R}}$$

3. (a) La fonction g est dérivable deux fois sur I comme somme et produit de fonctions dérivables deux fois sur I. En utilisant la relation donnée dans l'énoncé, on a :

$$g' : x \mapsto \frac{\lambda'(x)}{x-1}-\frac{\lambda(x)}{(x-1)^2}+\mu'(x)(x+1)+\mu(x)=-\frac{\lambda(x)}{(x-1)^2}+\mu(x)$$

$$g'' : x \mapsto -\frac{\lambda'(x)}{(x-1)^2}+\frac{2\lambda(x)}{(x-1)^3}+\mu'(x)$$

On injecte dans l'équation (E) et on s'attend à avoir des simplifications par analogie avec la méthode de la variation de la constante. Pour $x \in I$, on a : $(x^2-x)g''(x)+(x+1)g'(x)-g(x)=$

$$(x^2-x)\Big(-\frac{\lambda'(x)}{(x-1)^2}+\frac{2\lambda(x)}{(x-1)^3}+\mu'(x)\Big)+(x+1)\Big(-\frac{\lambda(x)}{(x-1)^2}+\mu(x)\Big)-\frac{\lambda(x)}{x-1}-\mu(x)(x+1)=$$

$$-\frac{x}{x-1}\lambda'(x)+(x^2-x)\mu'(x)=u(x)$$

$$\boxed{\forall x\in I,\ -\frac{x}{x-1}\lambda'(x)+(x^2-x)\mu'(x)=u(x)}$$

(b) On va combiner les relations obtenues dans la question précédente. Soit $x \in I$:

$$\begin{cases} \dfrac{\lambda'(x)}{x-1} + \mu'(x)(x+1) = 0 \\ -\dfrac{x}{x-1}\lambda'(x) + (x^2-x)\mu'(x) = u(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda'(x) + \mu'(x)(x^2-1) = 0 \\ -\lambda'(x) + \mu'(x)(x-1)^2 = \dfrac{u(x)(x-1)}{x} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda'(x) = -\mu'(x)(x^2-1) \\ -\lambda'(x) + \mu'(x)(x-1)^2 = \dfrac{u(x)(x-1)}{x} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda'(x) = -\mu'(x)(x^2-1) \\ \mu'(x)((x^2-1)-(x-1)^2) = \dfrac{u(x)(x-1)}{x} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda'(x) = -\mu'(x)(x^2-1) \\ \mu'(x) = \dfrac{u(x)}{2x^2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda'(x) = \dfrac{u(x)(1-x^2)}{2x^2} \\ \mu'(x) = \dfrac{u(x)}{2x^2} \end{cases}$$

$$\boxed{\forall x \in I, \begin{cases} \lambda'(x) = \dfrac{u(x)(1-x^2)}{2x^2} \\ \mu'(x) = \dfrac{u(x)}{2x^2} \end{cases}}$$

4. On applique la question précédente avec $u : x \mapsto x$. On a :

$$\forall x \in I, \begin{cases} \lambda'(x) = \dfrac{(1-x^2)}{2x} = \dfrac{1}{2x} - \dfrac{x}{2} \\ \mu'(x) = \dfrac{1}{2x} \end{cases}$$

On peut choisir :

$$\forall x \in I, \begin{cases} \lambda(x) = \dfrac{1}{2}\ln(|x|) - \dfrac{x^2}{4} \\ \mu(x) = \dfrac{1}{2}\ln(|x|) \end{cases}$$

D'après la question 3., une solution particulière de (E) sur I est :

$$x \mapsto \left(\frac{1}{2}\ln(|x|) - \frac{x^2}{4}\right) \times \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2}\ln(|x|)(x+1)$$

On ajoute les solutions de l'équation homogène trouvées dans la partie B pour obtenir les solutions de (E) sur I :

$$\boxed{\left\{x \mapsto \left(\frac{1}{2}\ln(|x|) - \frac{x^2}{4}\right) \times \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2}\ln(|x|)(x+1) + \frac{\lambda}{x-1} + \mu(x+1),\ (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\right\}}$$