

1- Soit $x \in \left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right]$, simplifier $\text{Arccos}(\cos(x))$.

2- Donner toutes les valeurs remarquables de la fonction Arcsin .

3- Vrai ou faux : la fonction Arcsin est 2π -périodique car $\sin$ l'est.

4- Sur quel ensemble la fonction $f : x \mapsto \text{Arcsin}(\sin(x))$ est-elle définie ? dérivable ? Calculer sa dérivée.

5- Pour $x \in \left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right]$, simplifier $\text{Arcsin}(\sin(x))$.

6- Esquisser le graphe de $x \mapsto \text{Arcsin}(\sin(x))$.

7- Donner une primitive sur un ensemble à préciser de $x \mapsto \frac{2}{3} \frac{e^{2x}}{\sqrt{1 - e^{4x}}}$.

1-Soit $x \in \left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right]$, simplifier $\text{Arccos}(\cos(x))$.

Réponse : Soit $x \in \left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right]$, on a $-x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ et par parité de la fonction cosinus, on a :

$$\text{Arccos}(\cos(x)) = \text{Arccos}(\cos(-x)) = -x$$

2-Donner toutes les valeurs remarquables de la fonction Arcsin.

Réponse : D'après les valeurs connues de la fonction sin, on a :

x	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\text{Arcsin}(x)$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$

3-Vrai ou faux : la fonction Arcsin est 2π -périodique car sin l'est.

Réponse : C'est faux, la fonction Arcsin est définie sur $[-1, 1]$ et cet ensemble n'est pas 2π -périodique.

4-Sur quel ensemble la fonction $f : x \mapsto \text{Arcsin}(\sin(x))$ est-elle définie ? dérivable ? Calculer sa dérivée.

Réponse : • La fonction $\sin$ est définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $[-1, 1]$. La fonction Arcsin est définie sur $[-1, 1]$, ainsi par composition f est définie sur $\mathbb{R}$.

• La fonction Arcsin est dérivable sur $] -1, 1[$ et $\sin(x) = \pm 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} [\pi]$. Ce qui permet d'affirmer que f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ et :

$$f'(x) = \frac{\cos(x)}{\sqrt{1 - \sin^2(x)}} = \frac{\cos(x)}{\sqrt{\cos^2(x)}} = \frac{\cos(x)}{|\cos(x)|}$$

5-Pour $x \in \left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right]$, simplifier $\text{Arcsin}(\sin(x))$.

Réponse : Soit $x \in \left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right]$, on a :

$$\text{Arcsin}(\sin(x)) = \text{Arcsin}(-\sin(x + \pi)) = -\text{Arcsin}(\sin(x + \pi))$$

En utilisant l'imparité de la fonction Arcsin .

Pour finir le calcul, on remarque que pour $x \in \left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right]$, on a :

$x + \pi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et pour tout $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\text{Arcsin}(\sin(\alpha)) = \alpha$.

Finalement :

$$\forall x \in \left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right], \text{Arcsin}(\sin(x)) = -(x + \pi)$$

6-Esquisser le graphe de $x \mapsto \text{Arcsin}(\sin(x))$.

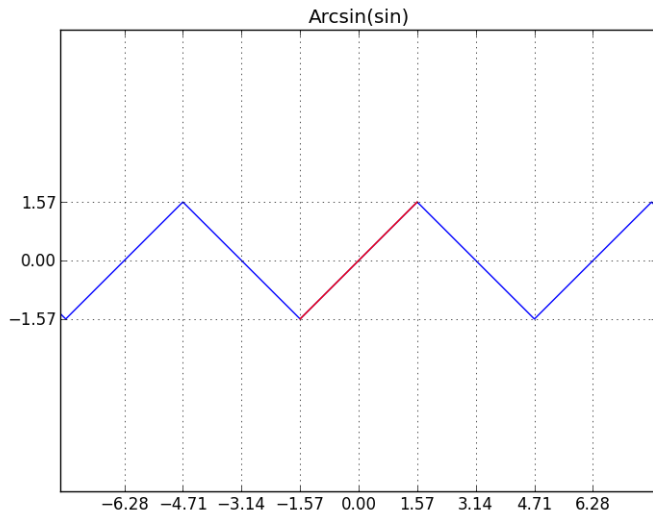
Réponse : Cette fonction est 2π -périodique. On a vu que :

$$\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \text{Arcsin}(\sin(x)) = x$$

$$\forall x \in \left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right], \text{Arcsin}(\sin(x)) = -x - \pi$$

$$\forall x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right], \text{Arcsin}(\sin(x)) = -x + \pi$$

Ce qui nous donne le graphique suivant :



7- Donner une primitive sur un ensemble à préciser de $x \mapsto \frac{2}{3} \frac{e^{2x}}{\sqrt{1 - e^{4x}}}$.

Réponse : La fonction est définie sur $\mathbb{R}_-^*$ afin que $1 - e^{4x} > 0$.

On reconnaît une expression de la forme $u' \times \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}}$ avec u une fonction dérivable à valeurs dans $] -1, 1[$. Ce type de fonction s'intègre en $\text{Arcsin}(u)$. Plus précisément, ici $u : x \mapsto e^{2x}$ et en posant :

$$F : x \mapsto \frac{1}{3} \text{Arcsin}(e^{2x})$$

on a F définie et dérivable sur $\mathbb{R}_-^*$ et :

$$F' : x \mapsto \frac{1}{3} \frac{2e^{2x}}{\sqrt{1 - (e^{2x})^2}} = \frac{2}{3} \frac{e^{2x}}{\sqrt{1 - e^{4x}}}$$