1-Trouver tous les réels x vérifiant $\dfrac{2}{x} < 1$.

2-Soient $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$, on suppose que $0 \leq a \leq b$ et $d \leq c \leq 0$.
Peut-on en déduire une inégalité entre ac et bd ?

3-Soient $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$, on suppose que $a \leq b$, $c \leq d$ et $a + c = b + d$.
Démontrer que $a = b$ et $c = d$.

4-Soient a et b deux réels. Que représente les quantités :

$$M = \frac{1}{2}(a + b + |a - b|) \text{ et } m = \frac{1}{2}(a + b - |a - b|)$$

5-Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ et $\varepsilon = \dfrac{b - a}{3}$. On note $I_a = [a - \varepsilon, a + \varepsilon]$ et $I_b = [b - \varepsilon, b + \varepsilon]$. À l'aide d'un dessin, conjecturer un résultat sur $I_a \cap I_b$ et le démontrer.

1-Trouver tous les réels x vérifiant $\frac{2}{x} < 1$.

Réponse : L'inéquation est définie si $x \neq 0$.

- Si $x < 0$ l'inéquation est clairement vérifiée.
- Si $x > 0$, la fonction inverse étant strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$\frac{2}{x} < 1 \Leftrightarrow \frac{x}{2} > 1 \Leftrightarrow x > 2$$

L'ensemble des solutions est : $]-\infty, 0[\cup]2, +\infty[$

2-Soient $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$, on suppose que $0 \leq a \leq b$ et $d \leq c \leq 0$.
Peut-on en déduire une inégalité entre ac et bd ?

Réponse : On multiplie la seconde inégalité par -1 pour obtenir : $-d \geq -c \geq 0$, c'est-à-dire : $0 \leq -c \leq -d$. À présent, on peut multiplier cette inégalité par $0 \leq a \leq b$ pour obtenir :

$$0 \leq -ac \leq -bd$$

C'est-à-dire :

$$ac \geq bd$$

3-Soient $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$, on suppose que $a \leq b$, $c \leq d$ et $a + c = b + d$. Démontrer que $a = b$ et $c = d$.

Réponse : En utilisant les inégalités $a \leq b$ et $c \leq d$, on obtient :

$$a + c \leq b + c \leq b + d$$

Or $a + c = b + d$, les inégalités précédentes sont donc des égalités. En particulier : $a + c = b + c$ d'où $a = b$ et $b + c = b + d$ d'où $c = d$.

4-Soient a et b deux réels. Que représente les quantités :

$$M = \frac{1}{2}(a + b + |a - b|) \text{ et } m = \frac{1}{2}(a + b - |a - b|)$$

Réponse : • Si $a \geq b$, on a :

$$M = \frac{1}{2}(a + b + (a - b)) = a$$

• Si $a \leq b$, on a :

$$M = \frac{1}{2}(a + b + (b - a)) = b$$

Finalement $M = \max(a, b)$. De la même manière, on démontre que : $m = \min(a, b)$.

5-Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ et $\varepsilon = \dfrac{b-a}{3}$. On note $I_a = [a-\varepsilon, a+\varepsilon]$ et $I_b = [b-\varepsilon, b+\varepsilon]$. À l'aide d'un dessin, conjecturer un résultat sur $I_a \cap I_b$ et le démontrer.

Réponse : On remarque que $I_a \cap I_b = \emptyset$. Par l'absurde, si $c \in I_a \cap I_b$, on a :

$$3\varepsilon = |b-a| = |(b-c)+(c-a)| \leq |b-c| + |c-a| \leq 2\varepsilon$$

Ce qui est absurde puisque $\varepsilon > 0$.