# À la découverte de l'arctangente

## *A-Simplification de Arctan$(x)$ + Arctan$(y)$*

*Ce problème se propose de trouver une simplication d'une somme d'arctangentes. L'outil principal est la formule :* $\tan(x+y) = \dfrac{\tan(x)+\tan(y)}{1-\tan(x)\tan(y)}$. *Les complications proviennent essentiellement des nombreux cas à considérer. Dans un second temps, deux applications des formules trouvées sont proposées. Notamment la formule de Machin, du nom de John Machin un mathématicien anglais du XVIIIième siècle, qui permet de calculer des décimales de $\pi$.*

1. La fonction $f$ est clairement définie sur $\mathbb{R}^*$ puisque la fonction Arctan est définie sur $\mathbb{R}$. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$ comme somme et composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$.
   Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a d'après la formule de dérivation d'une fonction composée :

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + -\frac{1}{x^2} \times \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1} = 0.$$

$$\boxed{f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}_+^* \text{ et } \mathbb{R}_-^* \text{ et pour tout } x \in \mathbb{R}^*,\ f'(x) = 0}$$

   Comme la dérivée de $f$ est nulle sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$, cela signifie que $f$ est constante sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$. Ainsi, il suffit de prendre deux valeurs particulières pour avoir :

$$\forall x \in ]-\infty, 0[,\ f(x) = f(-1) = 2\text{Arctan}(-1) = -\frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \forall x \in ]0, +\infty[,\ f(x) = f(1) = 2\text{Arctan}(1) = \frac{\pi}{2}$$

   On vient de démontrer que :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \text{Arctan}(x) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} & \text{si} \quad x > 0 \\ -\dfrac{\pi}{2} & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}}$$

2. (a) i. Pour $a \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$, $\cos(a) \neq 0$ et $\tan(a)$ est bien défini. On a :

$$\frac{1}{\cos^2(a)} = \frac{\cos^2(a) + \sin^2(a)}{\cos^2(a)} = 1 + \frac{\sin^2(a)}{\cos^2(a)} = 1 + \tan^2(a)$$

$$\boxed{\forall a \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[,\ \frac{1}{\cos^2(a)} = 1 + \tan^2(a)}$$

   On va utiliser la relation suivante valable pour tout $a \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ : $\cos^2(a) = \dfrac{1}{1+\tan^2(a)}$.
   On a pour tout $x \in \mathbb{R}$ :

$$\cos^2(\text{Arctan}(x)) = \frac{1}{1+\tan^2(\text{Arctan}(x))} = \frac{1}{1+x^2} \quad (\bigstar)$$

   De plus pour tout $x$ réel, on a : $\text{Arctan}(x) \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$, ainsi $\cos(\text{Arctan}(x)) > 0$.
   Ainsi en prenant la racine carrée de la relation ($\bigstar$), on obtient :

$$\boxed{\cos(\text{Arctan}(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}$$

ii. On a vu au cours du raisonnement précédent que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\cos(\mathrm{Arctan}(x)) > 0$, ainsi on peut écrire :

$$\tan(\mathrm{Arctan}(x)) = \frac{\sin(\mathrm{Arctan}(x))}{\cos(\mathrm{Arctan}(x))}$$

Etant donné que : $\forall x \in \mathbb{R}$, on a $\tan(\mathrm{Arctan}(x)) = x$, on a en utilisant la question précédente :

$$\sin(\mathrm{Arctan}(x)) = \tan(\mathrm{Arctan}(x)) \times \cos(\mathrm{Arctan}(x)) = x \times \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

On a démontré que :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \sin(\mathrm{Arctan}(x)) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}$$

(b) On va utiliser la formule de trigonométrie valable pour tous $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ :

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$

En utilisant la question 2.(a), on a pour tous $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ :

$$\begin{aligned}
\cos(\mathrm{Arctan}(x) + \mathrm{Arctan}(y)) &= \cos(\mathrm{Arctan}(x))\cos(\mathrm{Arctan}(y)) - \sin(\mathrm{Arctan}(x))\sin(\mathrm{Arctan}(y)) \\
&= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\frac{1}{\sqrt{1+y^2}} - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\frac{y}{\sqrt{1+y^2}} \\
&= \frac{1-xy}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2}}
\end{aligned}$$

On a démontré que :

$$\boxed{\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \cos(\mathrm{Arctan}(x) + \mathrm{Arctan}(y)) = \frac{1-xy}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2}}\ (\bigstar\bigstar)}$$

(c) Etant donné que la fonction arc tangente est à valeurs dans $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, on a pour tous $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ : $\mathrm{Arctan}(x) + \mathrm{Arctan}(y) \in ]-\pi, \pi[$.
Or d'après l'hypothèse de la question, on a $xy \neq 1$, ainsi le résultat obtenu à la question précédente montre que $\cos(\mathrm{Arctan}(x) + \mathrm{Arctan}(y)) \neq 0$. Ceci implique que $\mathrm{Arctan}(x) + \mathrm{Arctan}(y) \notin \left\{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\}$.
Finalement :

$$\boxed{\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \text{avec } xy \neq 1,\ \mathrm{Arctan}(x) + \mathrm{Arctan}(y) \in \left]-\pi, -\frac{\pi}{2}\right[ \cup \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[ \cup \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[}$$

(d) Etant donné que $\cos(\mathrm{Arctan}(x) + \mathrm{Arctan}(y)) \neq 0$, la quantité $\tan(\mathrm{Arctan}(x) + \mathrm{Arctan}(y))$ existe. On a alors puisque $xy \neq 1$ :

$$\begin{aligned}
\tan(\mathrm{Arctan}(x) + \mathrm{Arctan}(y)) &= \frac{\tan(\mathrm{Arctan}(x)) + \tan(\mathrm{Arctan}(y))}{1 - \tan(\mathrm{Arctan}(x))\tan(\mathrm{Arctan}(y))} \\
&= \frac{x+y}{1-xy}
\end{aligned}$$

En résumé :

$$\boxed{\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ avec } xy \neq 1,\ \tan(\mathrm{Arctan}(x) + \mathrm{Arctan}(y)) = \frac{x+y}{1-xy}\ (\bigstar\bigstar\bigstar)}$$

(e) On suppose que $xy < 1$, d'après la relation ($\bigstar\bigstar$), on a $\cos(\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(y)) > 0$. Ainsi, en utilisant la question 2.(b), il apparaît que l'on se trouve dans le cas où $\tan(\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(y)) \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
On rappelle que pour tout $a \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $\text{Arctan}(\tan(a)) = a$, on prend alors l'arc tangente de la relation ($\bigstar\bigstar\bigstar$), on a :

$$\boxed{\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ avec } xy < 1,\ \text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(y) = \text{Arctan}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)}$$

(f) On suppose $xy > 1$, d'après la relation ($\bigstar\bigstar$), on a $\cos(\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(y)) < 0$, ainsi on a :

$$\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(y) \in \left] -\pi, -\frac{\pi}{2}\right[ \cup \left] \frac{\pi}{2}, \pi\right[$$

De plus, on suppose dans cette question que $x > 0$, ce qui implique $\text{Arctan}(x) > 0$ et par suite $\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(y) > -\frac{\pi}{2}$.
On en déduit que $\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(y) \in \left] \frac{\pi}{2}, \pi\right[$.
Remarquons pour poursuivre le calcul le fait suivant : si $a \in \left] \frac{\pi}{2}, \pi\right[$, on a : $a - \pi \in \left] -\frac{\pi}{2}, 0\right[$ et dans ce cas :

$$\text{Arctan}(\tan(a)) = \text{Arctan}(\tan(a - \pi)) = a - \pi.$$

Fort de ce résultat, appliquons la fonction arc tangente à la relation ($\bigstar\bigstar\bigstar$), ceci donne :

$$\text{Arctan}(\tan(\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(y))) = \text{Arctan}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(y) - \pi = \text{Arctan}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$$

C'est-à-dire que :

$$\boxed{\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ avec } xy > 1 \text{ et } x > 0,\ \text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(y) = \text{Arctan}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) + \pi}$$

(g) On suppose $xy > 1$, d'après la relation ($\bigstar\bigstar$), on a $\cos(\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(y)) < 0$, ainsi on a :

$$\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(y) \in \left] -\pi, -\frac{\pi}{2}\right[ \cup \left] \frac{\pi}{2}, \pi\right[$$

De plus, on suppose dans cette question que $x < 0$, ce qui implique $\text{Arctan}(x) < 0$ et par suite $\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(y) < \frac{\pi}{2}$.
On en déduit que $\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(y) \in \left] -\pi, -\frac{\pi}{2}\right[$.
Remarquons pour poursuivre le calcul le fait suivant : si $a \in \left] -\pi, -\frac{\pi}{2}\right[$, on a : $a + \pi \in \left] 0, \frac{\pi}{2}\right[$ et dans ce cas :

$$\text{Arctan}(\tan(a)) = \text{Arctan}(\tan(a + \pi)) = a + \pi.$$

Fort de ce résultat, appliquons la fonction arc tangente à la relation ($\bigstar\bigstar\bigstar$), ceci donne :

$$\text{Arctan}(\tan(\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(y))) = \text{Arctan}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$$

$$\Leftrightarrow$$
$$\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(y) + \pi = \text{Arctan}\Big(\frac{x+y}{1-xy}\Big)$$

C'est-à-dire que :

$$\boxed{\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ avec } xy > 1 \ \text{ et } x < 0,\ \text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(y) = \text{Arctan}\Big(\frac{x+y}{1-xy}\Big) - \pi}$$

3. On a traité tous les cas dans les questions précédentes :
   Résumons pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\boxed{\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(y) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} & \text{si} \quad xy = 1 \text{ et } x > 0 \\ -\dfrac{\pi}{2} & \text{si} \quad xy = 1 \text{ et } x < 0 \\ \text{Arctan}\Big(\dfrac{x+y}{1-xy}\Big) & \text{si} \quad xy < 1 \\ \text{Arctan}\Big(\dfrac{x+y}{1-xy}\Big) + \pi & \text{si} \quad xy > 1 \text{ et } x > 0 \\ \text{Arctan}\Big(\dfrac{x+y}{1-xy}\Big) - \pi & \text{si} \quad xy > 1 \text{ et } x < 0 \end{cases}}$$

4. (a) On doit simplifier $\text{Arctan}\Big(\dfrac{1}{5}\Big) + \text{Arctan}\Big(\dfrac{1}{5}\Big)$. On applique l'étude précédente à $x = \dfrac{1}{5}$ et $y = \dfrac{1}{5}$. Comme $\dfrac{1}{5} \times \dfrac{1}{5} = \dfrac{1}{25} < 1$, on a, en se référant au résumé de la question précédente :

$$2\text{Arctan}\Big(\frac{1}{5}\Big) = \text{Arctan}\Big(\frac{\frac{1}{5}+\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}}\Big) = \text{Arctan}\Big(\frac{\frac{2}{5}}{\frac{24}{25}}\Big) = \text{Arctan}\Big(\frac{5}{12}\Big)$$

   D'où l'égalité :

$$\boxed{2\text{Arctan}\Big(\frac{1}{5}\Big) = \text{Arctan}\Big(\frac{5}{12}\Big)}$$

   (b) On a ainsi : $4\text{Arctan}\Big(\dfrac{1}{5}\Big) = 2\text{Arctan}\Big(\dfrac{5}{12}\Big)$. C'est la même méthode que précédemment puisque $\dfrac{5}{12} \times \dfrac{5}{12} < 1$ :

$$2\text{Arctan}\Big(\frac{5}{12}\Big) = \text{Arctan}\Big(\frac{\frac{5}{12}+\frac{5}{12}}{1-\frac{5}{12}\times\frac{5}{12}}\Big) = \text{Arctan}\Big(\frac{\frac{10}{12}}{\frac{119}{144}}\Big) = \text{Arctan}\Big(\frac{120}{119}\Big)$$

   On a démontré que :

$$\boxed{4\text{Arctan}\Big(\frac{1}{5}\Big) = \text{Arctan}\Big(\frac{120}{119}\Big)}$$

   (c) On a $4\text{Arctan}\Big(\dfrac{1}{5}\Big) - \text{Arctan}\Big(\dfrac{1}{239}\Big) = \text{Arctan}\Big(\dfrac{120}{119}\Big) + \text{Arctan}\Big(-\dfrac{1}{239}\Big)$ d'après la question précédente. On utilise toujours les résultats de la question 3., on a $\dfrac{120}{119} \times -\dfrac{1}{239} < 1$, ainsi :

$$\mathrm{Arctan}\Big(\frac{120}{119}\Big)+\mathrm{Arctan}\Big(-\frac{1}{239}\Big)=\mathrm{Arctan}\left(\frac{\frac{120}{119}-\frac{1}{239}}{1+\frac{120}{119}\times\frac{1}{239}}\right)=\mathrm{Arctan}(1)=\frac{\pi}{4}$$

C'est la formule de Machin :

$$\boxed{\frac{\pi}{4}=4\mathrm{Arctan}\Big(\frac{1}{5}\Big)-\mathrm{Arctan}\Big(\frac{1}{239}\Big)}$$

*Cette formule fut trouvée par John Machin en 1706, il l'utilisa pour calculer* 100 *décimales du nombre* $\pi$*, ce qui constituait le record à l'époque. Aujourd'hui, on connaît 12000 milliards de décimales de* $\pi$*.*

## *B-Approximation polynomiale de la fonction arc tangente*

*Cette partie vise à obtenir un polynôme qui est "proche" de la fonction Arctan. En seconde année, vous justifierez l'écriture :*

$$\forall x\in[-1,1],\ \mathrm{Arctan}(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{2k+1}.$$

*Ceci va notamment nous permettre d'obtenir un procédé pour calculer des décimales de* $\pi$*.*

1. Soit $q\in\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{N}$. Supposons dans un premier temps $q\neq -1$, on a :

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^kq^k=\sum_{k=0}^{n}(-q)^k=\frac{1-(-q)^{n+1}}{1-(-q)}=\frac{1-(-q)^{n+1}}{1+q}$$

   Ceci en utilisant la formule donnant la somme des termes d'une suite géométrique.
   Si $q=-1$, on a : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(-1)^k=\sum_{k=0}^{n}1=n+1$.
   On a démontré :

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n}(-1)^kq^k=\begin{cases}n+1 & \text{si}\quad q=-1\\[2ex] \dfrac{1-(-q)^{n+1}}{1+q} & \text{si}\quad q\neq -1\end{cases}}$$

2. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, la fonction $S_n$ est dérivable car c'est une fonction polynomiale. Pour tout $x\geq 0$, on a :

$$S_n'(x)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(2k+1)\frac{x^{2k}}{2k+1}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(x^2)^k=\frac{1-(-x^2)^{n+1}}{1+x^2}.$$

   La dernière égalité s'obtenant grâce à la question précédente appliquée à $q=x^2$.
   On a :

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ \forall x\geq 0,\quad S_n'(x)=\frac{1-(-x^2)^{n+1}}{1+x^2}}$$

3. (a) Puisque $S_n(0)=0$ et $\mathrm{Arctan}(0)=0$, on a :

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ R_n(0)=0}$$

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $R_n$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+$ et :

$$R_n'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1-(-x^2)^{n+1}}{1+x^2} = \frac{(-x^2)^{n+1}}{1+x^2} = \begin{cases} \dfrac{x^{2n+2}}{1+x^2} & \text{si} \quad n \text{ impair} \\ -\dfrac{x^{2n+2}}{1+x^2} & \text{si} \quad n \text{ pair} \end{cases}$$

Si $n$ est impair : $\forall x \geq 0,\ R_n'(x) \geq 0$. Si $n$ est pair : $\forall x \geq 0,\ R_n'(x) \leq 0$. Ce qui permet de connaître les variations de $R_n$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \begin{cases} R_n \text{ est croissante} & \text{si} \quad n \text{ impair} \\ R_n \text{ est décroissante} & \text{si} \quad n \text{ pair} \end{cases}}$$

(c) ► Soit $n$ un entier naturel impair. On a pour tout $x \geq 0$ : $R_n(x) \geq R_n(0) = 0 \Leftrightarrow \text{Arctan}(x) \geq S_n(x)$.
Dans ce cas $n+1$ est un entier pair, donc $x \geq 0$ : $R_{n+1}(x) \leq R_{n+1}(0) = 0 \Leftrightarrow \text{Arctan}(x) \leq S_{n+1}(x)$.
Finalement :

$$\boxed{\text{Si } n \text{ est impair : } \forall x \geq 0,\ S_n(x) \leq \text{Arctan}(x) \leq S_{n+1}(x)}$$

► Soit $n$ un entier naturel pair. On a pour tout $x \geq 0$ : $R_n(x) \leq R_n(0) = 0 \Leftrightarrow \text{Arctan}(x) \leq S_n(x)$.
Dans ce cas $n+1$ est un entier impair, donc $x \geq 0$ : $R_{n+1}(x) \geq R_{n+1}(0) = 0 \Leftrightarrow \text{Arctan}(x) \geq S_{n+1}(x)$.
Finalement :

$$\boxed{\text{Si } n \text{ est pair : } \forall x \geq 0,\ S_{n+1}(x) \leq \text{Arctan}(x) \leq S_n(x)}$$

(d) Remarquons pour commencer que pour tout $x \geq 0$ :

$$S_{n+1} - S_n(x) = \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} = (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+3}}{2n+3}.$$

► Soit $n$ un entier naturel impair et $x \geq 0$, en retranchant $S_n(x)$ à l'inégalité obtenue à la question précédente, on a :

$$0 \leq \text{Arctan}(x) - S_n(x) \leq S_{n+1}(x) - S_n(x) = \frac{x^{2n+3}}{2n+3} \quad (A)$$

► Soit $n$ un entier naturel pair et $x \geq 0$, en retranchant $S_n(x)$ à l'inégalité obtenue à la question précédente, on a :

$$-\frac{x^{2n+3}}{2n+3} = S_{n+1}(x) - S_n(x) \leq \text{Arctan}(x) - S_n(x) \leq 0 \quad (B)$$

Ainsi, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, les inégalités $(A)$ et $(B)$ donnent :

$$\forall x \geq 0,\ -\frac{x^{2n+3}}{2n+3} \leq \text{Arctan}(x) - S_n(x) \leq \frac{x^{2n+3}}{2n+3}$$

C'est-à-dire :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \geq 0,\ \left|\text{Arctan}(x) - S_n(x)\right| \leq \frac{x^{2n+3}}{2n+3}}$$

4. On utilise l'inégalité précédente avec $x = 1$, sachant que $\text{Arctan}(1) = \dfrac{\pi}{4}$ et $S_n(1) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$\left|\frac{\pi}{4} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}\right| \leq \frac{1}{2n+3}$$

Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2n+3} = 0$, on a en passant à la limite :

$$\frac{\pi}{4} = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}$$

C'est-à-dire :

$$\boxed{\pi = 4 \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}}$$

5. D'après l'étude menée à la question précédente, on a :

$$\left|\pi - 4\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}\right| \leq \frac{4}{2n+3}$$

On souhaite avoir :

$$\frac{4}{2n+3} \leq 10^{-6} \Leftrightarrow 4 \times 10^6 \leq 2n+3 \Leftrightarrow \frac{4 \times 10^6 - 3}{2} \leq n$$

Ainsi lorsque $n \geq \dfrac{4 \times 10^6 - 3}{2}$, on a $\left|\pi - 4\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}\right| \leq \dfrac{4}{2n+3} \leq 10^{-6}$.

Dans ce cas $4\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}$ est une valeur approchée de $\pi$ à $10^{-6}$ près.

*La formule précédente est horriblement lente pour calculer des décimales de $\pi$, en effet le calcul précédent montre qu'il faut ajouter presque $2$ millions de termes pour avoir $6$ chiffres corrects de $\pi$. La formule de Machin trouvée à la question 4.(c) de la partie B est déjà meilleure.*