1-Écrire de deux façons différentes : $S = \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij}$.

2-Soit $n \in \mathbb{N}$, calculer : $S = \sum_{0 \leq p \leq q \leq n} 2^p$.

3-Soient I et J deux ensembles finis d'indices. Est-il vrai que :

$$\prod_{k \in (I \cup J)} a_k = \Big(\prod_{k \in I} a_k\Big)\Big(\prod_{k \in J} a_k\Big)$$

4-Vrai ou faux : $\prod_{1 \leq i \leq j \leq n} i = (n!)!$.

5-★ Calculer : $P = \prod_{1 \leq i,j \leq n \text{ et } i \neq j} ij$.

1-Écrire de deux façons différentes : $S = \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij}$.

Réponse : Cette somme se réécrit :

$$S = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{j-1} a_{ij}$$

2-Soit $n \in \mathbb{N}$, calculer : $S = \displaystyle\sum_{0 \leq p \leq q \leq n} 2^p$.

Réponse : On a :

$$\begin{aligned}
S &= \sum_{q=0}^{n} \sum_{p=0}^{q} 2^p \\
&= \sum_{q=0}^{n} \frac{2^{q+1}-1}{2-1} \\
&= \sum_{q=0}^{n} (2^{q+1}-1) \\
&= 2\sum_{q=0}^{n} 2^q - \sum_{q=0}^{n} 1 \\
&= 2^{n+2} - 2 - (n+1)
\end{aligned}$$

3-Soient I et J deux ensembles finis d'indices. Est-il vrai que :

$$\prod_{k\in(I\cup J)} a_k = \Big(\prod_{k\in I} a_k\Big)\Big(\prod_{k\in J} a_k\Big)$$

Réponse : C'est faux en général : si I et J ont des éléments en commun, les facteurs correspondants seront alors comptés dans chaque produit donc une fois en trop.
La formule est vraie si I et J sont disjoints.

4-Vrai ou faux : $\displaystyle\prod_{1\leq i\leq j\leq n} i = (n!)!$.

Réponse : Le produit proposé vaut :

$$\prod_{j=1}^{n}\prod_{i=1}^{j} i = \prod_{j=1}^{n} j! = 1! \times 2! \times 3! \times ... \times n!$$

Cette quantité est différente de :

$$(n!)! = 1 \times 2 \times 3 \times ... \times n!$$

5-Calculer : $P = \prod_{1 \leq i,j \leq n \text{ et } i \neq j} ij$.

Réponse : On a :

$$P = \frac{\prod_{1 \leq i,j \leq n} ij}{\prod_{1 \leq i=j \leq n} ij} = \frac{\prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{n} ij}{\prod_{i=1}^{n} i^2} = \frac{(n!)^{2n}}{(n!)^2} = (n!)^{2n-2}$$