D3 ★★★ Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$. On suppose que tout $y \in \mathbb{R}$ admet au plus 2 antécédents par f. Montrer qu'il existe un réel qui admet un unique antécédent par f.

Pour suivre cette démonstration, il est conseillé de faire des dessins correspondants aux différents cas.

Corrigé. Toute application injective convient évidemment. Il reste à étudier le cas où f n'est pas injective, c'est-à-dire que l'on considère $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a < b$ et $f(a) = f(b)$, notons y_0 cette valeur commune. Comme l'application f est continue, l'image par f d'un segment est un segment, il existe $m < M$ deux réels tels que $f([a, b]) = [m, M]$ (m et M sont distincts sinon f est constante sur $[a, b]$ ce qui est exclu par hypothèse).

Si y_0 n'est ni égal à m ni égal à M alors $y_0 \in]m, M[$. Par définition de m et M, il existe $(c, d) \in [a, b]^2$ tels que $f(c) = m$ et $f(d) = M$. Comme f est continue d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $x_0 \in]c, d[$ tel que $f(x_0) = y_0$. Ceci est absurde car y_0 aurait alors trois antécédents distincts. Ceci montre que l'on a nécessairement $y_0 = m$ ou $y_0 = M$. Quitte à transformer la fonction f en $-f$, supposons que $y_0 = m$. On va voir que dans ce cas M admet d comme unique antécédent. Raisonnons par l'absurde en supposant que $d' \neq d$ est également un antécédent de M et discutons de la position de d' :

- Si $d' < a$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, tout réel $t \in]m, M[$ admet au moins trois antécédents : un dans chacun des intervalles $]d', a[$, $]a, d[$ et $]d, b[$. Ceci est absurde.
- Si $a < d' < b$. Supposons que $d < d'$, l'autre cas étant identique. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel $t \in]m, M[$ admettant au moins trois antécédents : un dans chacun des intervalles $]a, d[$ et $]d, d'[$ et $]d', b[$. Ceci est absurde.
- Si $d' > b$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, tout réel $t \in]d, d'[$ admet au moins trois antécédents : un dans chacun des intervalles $]a, d[$ et $]d, b[$ et $]b, d'[$ Ceci est absurde.

$$\boxed{\text{On a démontré que } M \text{ n'a qu'un seul antécédent par } f}$$

18 ★★ Soit $f \in \mathcal{C}([a, b])$ avec $f(a) \neq f(b)$ et $(u, v) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que :

$$uf(a) + vf(b) = (u + v)f(c)$$

Corrigé. On suppose $f(a) < f(b)$ par exemple, l'autre cas étant similaire. On pose :

$$g : x \mapsto (u + v)f(x) - uf(a) - vf(b)$$

Le but est de démontrer que g s'annule. La fonction g étant continue, il suffit de montrer que g prend une valeur négative et une valeur positive. On a :

$$g(a) = v(f(a) - f(b)) < 0$$

$$g(b) = u(f(b) - f(a)) > 0$$

Ce qui permet de conclure.

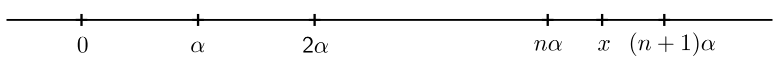
23 ★★★ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uniformément continue, montrer qu'il existe $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ |f(x)| \leq A|x| + B$$

On rappelle la définition de la continuité uniforme sur $\mathbb{R}$ de la fonction f :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ |x - y| \leq \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

Prenons $\varepsilon = 1$, la définition fournit ainsi un $\alpha > 0$ correspondant. Soit $x \geq 0$, l'idée va être de joindre 0 à x à l'aide d'une suite de points telle que la distance entre deux points consécutifs ne dépasse pas α afin de pouvoir utiliser la définition de la continuité uniforme ci-dessus. Cette chaîne de points est $x_0 = 0,\ x_1 = \alpha,\ x_2 = 2\alpha, ..., x_n = n\alpha$ avec $n \in \mathbb{N}$ choisi tel que $n\alpha \leq x < (n+1)\alpha$; ceci est bien sûr possible avec $n = E\left(\dfrac{x}{\alpha}\right)$.



En faisant apparaître une somme télescopique et en utilisant l'inégalité triangulaire généralisée, on a :

$$\begin{array}{rcl} |f(x) - f(0)| & = & \Big|[f(x) - f(n\alpha)] + [f(n\alpha) - f((n-1)\alpha)] + ... + [f(\alpha) - f(0)]\Big| \\ & \leq & |f(x) - f(n\alpha)| + |f(n\alpha) - f((n-1)\alpha)| + ... + |f(\alpha) - f(0)| \\ & \leq & (n+1)\varepsilon = n + 1 \end{array}$$

La dernière égalité étant issue de la définition de l'uniforme continuité puisque :

$$|x - n\alpha| \leq \alpha,\ |n\alpha - (n-1)\alpha| \leq \alpha, ...,\ |\alpha - 0| \leq \alpha$$

D'après l'inégalité triangulaire bis, on obtient :

$$|f(x)| - |f(0)| \leq |f(x) - f(0)| \leq (n+1)\varepsilon$$

C'est-à-dire que $|f(x)| \leq |f(0)| + (n+1)$. Or $n \leq \dfrac{x}{\alpha} + 1$, on pose ainsi $C = \dfrac{1}{\alpha}$ et $D = 2 + |f(0)|$ et on obtient :

$$\forall x \geq 0,\ |f(x)| \leq C|x| + D$$

Par un raisonnement tout à fait similaire sur $\mathbb{R}_-$, on obtient l'existence de deux constantes réelles C' et D' telles que :

$$\forall x \leq 0,\ |f(x)| \leq C'|x| + D'$$

Il reste à poser $A = \max(C, C')$ et $B = \max(D, D')$ pour avoir le résultat annoncé :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ |f(x)| \leq A|x| + B}$$

$\boxed{\text{D4}}$ ★★★ Étudier la continuité de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \cos(x) & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ \dfrac{1}{2} & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Corrigé : Soit $A = \left\{\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi,\ -\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$. On va démontrer que f est continue uniquement en tout point de A.

• Soit $x_0 \in A$. On a $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ donc $f(x_0) = \dfrac{1}{2}$. On va utiliser la caractérisation séquentielle de la continuité. Soit (u_n) une suite de réels qui tend vers x_0. Si $u_n \in \mathbb{Q},\ f(u_n) = \cos(u_n)$ et si $u_n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ alors $f(u_n) = \dfrac{1}{2}$. Ce qui nous donne $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = \dfrac{1}{2} = f(x_0)$. On en déduit que f est continue en x_0.

• Soit $x_0 \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \setminus A$, on a $f(x_0) = \dfrac{1}{2} \neq \cos(x_0)$. Par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, il existe une suite de rationnels (u_n) qui tend vers x_0, on a alors :

$$f(u_n) = \cos(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \cos(x_0) \neq \frac{1}{2} = f(x_0)$$

La fonction f n'est pas continue en x_0.

• Soit $x_0 \in \mathbb{Q}$, on a $f(x_0) = \cos(x_0) \neq \dfrac{1}{2}$. Par densité de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, il existe une suite (u_n) d'irrationnels qui tend vers x_0, on a alors :

$$f(u_n) = \frac{1}{2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2} \neq f(x_0)$$

Ainsi par caractérisation séquentielle de la continuité, on en déduit que f n'est pas continue en x_0.

$$\boxed{f \text{ est continue sur } A}$$