

1-Donner une primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de $x \mapsto \sqrt{x}$ et de $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$.

2-Donner une primitive sur $\mathbb{R}$ de th^2 et de th .

3-Trouver une primitive de $f : x \mapsto \frac{2}{x^2 + x}$.

4-Vrai ou faux : une primitive sur $] -\infty, 1[$ de $f : t \mapsto \frac{3}{t-1}$ est $F : t \mapsto 3 \ln(3(1-t))$.

5-La fonction valeur absolue définie sur $\mathbb{R}$ est-elle la primitive d'une fonction ? admet-elle des primitives ?

6-Déterminer une primitive de $f : x \mapsto (6x+3)\sqrt{x^2+x+1}$.

7-Déterminer une primitive de $f : x \mapsto \frac{3}{1+9x^2}$.

1-Donner une primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de $x \mapsto \sqrt{x}$ et de $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$.

Réponse : • Une primitive sur $\mathbb{R}_+$ de la fonction $x \mapsto \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ est $x \mapsto \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$.

• Une primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de la fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ est $x \mapsto 2\sqrt{x}$.

2-Donner une primitive sur $\mathbb{R}$ de th^2 et de th .

Réponse : • La dérivée sur $\mathbb{R}$ de la fonction th est $1 - \text{th}^2$. Ainsi une primitive sur $\mathbb{R}$ de $\text{th}^2 = 1 - (1 - \text{th}^2)$ est $x \mapsto x - \text{th}(x)$.

• On a $\text{th} = \frac{\text{sh}}{\text{ch}}$, de la forme $\frac{u'}{u}$. Une primitive est donc $\ln(\text{ch})$ définie sur $\mathbb{R}$.

3-En précisant l'ensemble de définition, trouver une primitive de $f : x \mapsto \frac{2}{x^2 + x}$.

Réponse : Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$, on a :

$$\frac{2}{x^2 + x} = \frac{2}{x(x+1)} = \frac{2 + 2x - 2x}{x(x+1)} = \frac{2 + 2x}{x(x+1)} - \frac{2x}{x(x+1)} = \frac{2}{x} - \frac{2}{x+1}$$

Une primitive sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$ est :

$$F : x \mapsto 2 \ln(|x|) - 2 \ln(|x+1|) = \ln \left(\frac{x^2}{(x+1)^2} \right)$$

4-Vrai ou faux : une primitive sur $] - \infty, 1[$ de $f : t \mapsto \frac{3}{t-1}$ est $F : t \mapsto 3 \ln(3(1-t))$.

Réponse : C'est vrai car pour tout $t \in] - \infty, 1[$, on a :

$$F(t) = 3 \ln(3) + 3 \ln(1-t)$$

La fonction $t \mapsto 3 \ln(1-t)$ est bien une primitive de f sur $] - \infty, 1[$ et $3 \ln(3)$ est une constante.

5-La fonction valeur absolue définie sur $\mathbb{R}$ est-elle la primitive d'une fonction ? admet-elle des primitives ?

Réponse : • La fonction valeur absolue ne peut pas être une primitive sur $\mathbb{R}$ car elle n'est pas dérivable en 0.

• Par contre, la fonction valeur absolue est continue sur $\mathbb{R}$, ce qui suffit à affirmer qu'elle admet des primitives sur $\mathbb{R}$. Plus précisément, la fonction suivante est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction valeur absolue :

$$F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 & \text{si } x \geq 0 \\ -\frac{1}{2}x^2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

6-Déterminer une primitive de $f : x \mapsto (6x + 3)\sqrt{x^2 + x + 1}$

Réponse : $f : x \mapsto (6x + 3)\sqrt{x^2 + x + 1}$ est définie sur $\mathbb{R}$ car le discriminant du trinôme sous la racine carrée est strictement négatif. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$f(x) = 3(2x + 1)\sqrt{x^2 + x + 1}$$

C'est de la forme $u' u^{\frac{1}{2}}$ avec $u(x) = x^2 + x + 1$.

$$F : x \mapsto 2(x^2 + x + 1)^{\frac{3}{2}} \text{ définie sur } \mathbb{R}$$

7-Déterminer une primitive de $f : x \mapsto \frac{3}{1+9x^2}$.

Réponse : $f : x \mapsto \frac{3}{1+9x^2}$ est définie sur $\mathbb{R}$. On reconnaît la forme $\frac{u'}{1+u^2}$ avec $u(x) = 3x$.

$F : x \mapsto \text{Arctan}(3x)$ définie sur $\mathbb{R}$