

Partie A : Formule d'inversion de Pascal.

1. En utilisant : $\binom{0}{0} = 1$, $\binom{1}{0} = 1$, $\binom{1}{1} = 1$, $\binom{2}{0} = 1$, $\binom{2}{1} = 2$ et $\binom{2}{2} = 1$, on a immédiatement :

$$f_0 = g_0, f_1 = g_0 + g_1 \text{ et } f_2 = g_0 + 2g_1 + g_2$$

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$, en utilisant la formule du binôme de Newton, il vient :

$$f_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} g_k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1 = (1+1)^n = 2^n$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, f_n = 2^n$$

- (b) Soit $n \in \mathbb{N}$, toujours avec la formule du binôme de Newton, on a :

$$f_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} g_k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k = (2+1)^n = 3^n$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, f_n = 3^n$$

- (c) Soit $n \in \mathbb{N}$, avec la même méthode, on a :

$$f_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} g_k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k = (-1+1)^n = \begin{cases} 1 & \text{si } n=0 \\ 0 & \text{si } n \geq 1 \end{cases}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, f_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n=0 \\ 0 & \text{si } n \geq 1 \end{cases}$$

- (d) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{C}$, on a :

$$f_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} g_k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (e^a)^k = (e^a + 1)^n$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, f_n = (e^a + 1)^n$$

3. La condition $0 \leq j \leq k \leq n$ portant sur les entiers j , k et n permet d'utiliser l'expression des coefficients binomiaux à l'aide des factorielles :

$$\binom{n}{k} \binom{k}{j} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \times \frac{k!}{j!(k-j)!} = \frac{n!}{j!(n-j)!} \times \frac{(n-j)!}{(n-k)!(k-j)!}$$

Pour écrire cette dernière égalité, on a simplifié par $k!$ et multiplié et divisé par $(n-j)!$.

$$\forall (j, k, n) \in \mathbb{N}^3 \text{ tels que } 0 \leq j \leq k \leq n, \binom{n}{k} \binom{k}{j} = \binom{n}{j} \binom{n-j}{n-k}$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} f_k &= \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} g_j \\
 &= \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^k (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \binom{k}{j} g_j \\
 &= \sum_{j=0}^n \sum_{k=j}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \binom{k}{j} g_j && \text{en intervertissant les deux sommes} \\
 &= \sum_{j=0}^n \sum_{k=j}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{j} \binom{n-j}{n-k} g_j && \text{en utilisant la question précédente} \\
 &= \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} g_j \sum_{k=j}^n (-1)^{n-k} \binom{n-j}{n-k} && \text{car } \binom{n}{j} g_j \text{ ne dépend pas de } k \\
 &= \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} g_j \sum_{l=0}^{n-j} (-1)^l \binom{n-j}{l} && \text{par renversement de la somme : } l = n - k \\
 &= \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} g_j (1-1)^{n-j} && \text{en utilisant la formule du binôme} \\
 &= \binom{n}{n} g_n 0^{n-n} && \text{le seul terme non nul de la somme est pour } j = n \\
 &= g_n
 \end{aligned}$$

Ce qui démontre la formule d'inversion de Pascal :

$$\boxed{\forall n \geq 0, \quad g_n = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} f_k}$$

Partie B : Nombre de dérangements

1. La première personne a n choix possibles pour prendre un cadeau au pied du sapin. Le second participant a seulement $n - 1$ choix puisqu'il y a déjà un cadeau de pris. Ainsi de suite, jusqu'à la dernière personne qui n'a plus qu'un seul choix possible puisqu'il ne reste qu'un cadeau au pied du sapin.

Ce qui nous fait au total $n \times (n - 1) \times (n - 2) \dots \times 1 = n!$ possibilités.

Il y a $n!$ distributions possibles

2. ► S'il n'y a qu'une seule personne, elle récupère nécessairement son cadeau : $d_1 = 0$.
 ► S'il y a deux personnes A et B , il n'y a qu'un échange possible respectant la condition : A prend le cadeau de B et B prend le cadeau de A . Ainsi $d_2 = 1$.
 ► S'il y a trois personnes voici les échanges possibles afin que chacun récupère un cadeau différent du sien :

$A \leftarrow$ cadeau de B	$A \leftarrow$ cadeau de C
$B \leftarrow$ cadeau de C	$B \leftarrow$ cadeau de A
$C \leftarrow$ cadeau de A	$C \leftarrow$ cadeau de B

Ce qui nous donne $d_3 = 2$

- Voici les permutations qui conviennent avec 4 participants au partage :

$A \leftarrow$ cadeau de B	$A \leftarrow$ cadeau de C	$A \leftarrow$ cadeau de D
$B \leftarrow$ cadeau de C	$B \leftarrow$ cadeau de D	$B \leftarrow$ cadeau de A
$C \leftarrow$ cadeau de D	$C \leftarrow$ cadeau de A	$C \leftarrow$ cadeau de B
$D \leftarrow$ cadeau de A	$D \leftarrow$ cadeau de B	$D \leftarrow$ cadeau de C
$A \leftarrow$ cadeau de B	$A \leftarrow$ cadeau de D	$A \leftarrow$ cadeau de C
$B \leftarrow$ cadeau de A	$B \leftarrow$ cadeau de D	$B \leftarrow$ cadeau de A
$C \leftarrow$ cadeau de D	$C \leftarrow$ cadeau de A	$C \leftarrow$ cadeau de D
$D \leftarrow$ cadeau de C	$D \leftarrow$ cadeau de C	$D \leftarrow$ cadeau de B
$A \leftarrow$ cadeau de C	$A \leftarrow$ cadeau de D	$A \leftarrow$ cadeau de D
$B \leftarrow$ cadeau de D	$B \leftarrow$ cadeau de C	$B \leftarrow$ cadeau de C
$C \leftarrow$ cadeau de B	$C \leftarrow$ cadeau de A	$C \leftarrow$ cadeau de B
$D \leftarrow$ cadeau de A	$D \leftarrow$ cadeau de B	$D \leftarrow$ cadeau de A

Ce qui nous donne $d_4 = 9$

$d_1 = 0, d_2 = 1, d_3 = 2$ et $d_4 = 9$

3. Soit k un entier naturel tel que $0 \leq k \leq n$. Voici comment on peut choisir une distribution telle que exactement k personnes reçoivent leur cadeau.

► On choisit les k personnes parmi les n qui vont recevoir leur cadeau, d'après le rappel de l'énoncé il y a $\binom{n}{k}$ façons de faire ce choix.

► Il reste $n - k$ personnes qui doivent toutes recevoir un cadeau différent du leur, ce qui fait d_{n-k} possibilités. Finalement, il y a :

$\binom{n}{k} d_{n-k}$ distributions qui conviennent

4. Comme le nombre total de distributions est $n!$, en utilisant la question précédente, on a :

$$n! = \underbrace{\binom{n}{0} d_n}_{\text{aucun élève ne reçoit son cadeau}} + \underbrace{\binom{n}{1} d_{n-1}}_{\text{1 élève reçoit son cadeau}} + \underbrace{\binom{n}{2} d_{n-2}}_{\text{2 élèves reçoivent leur cadeau}} + \dots + \underbrace{\binom{n}{n} d_0}_{\text{n élèves reçoivent leur cadeau}}$$

Le résultat donne bien $n!$ puisque l'on a tenu compte de toutes les façons possibles d'effectuer ce partage.

On a :

$$n! = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} d_{n-k} = \sum_{l=0}^n \binom{n}{n-l} d_l = \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} d_l$$

On a effectué au cours de ce calcul le changement d'indice $l = n - k$ et on a utilisé la formule de symétrie des coefficients du binôme.

$$\forall n \geq 1, n! = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} d_k$$

On remarque que cette formule reste encore vraie pour $n = 0$ grâce à la convention choisie sur d_0 .

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n = n!$ et $g_n = d_n$. Les suites $(f_n)_{n \geq 0}$ et $(g_n)_{n \geq 0}$ sont liées par la relation donnée dans la partie A, ceci grâce au résultat de la question précédente puisque :

$$\forall n \in \mathbb{N}, n! = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} d_k$$

On applique la formule d'inversion de Pascal démontrée à la question 4. de la partie A pour obtenir :

$$\forall n \in \mathbb{N}, d_n = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k!$$

On va transformer un peu cette relation pour obtenir celle de l'énoncé, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} d_n &= \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k! \\ &= \sum_{l=0}^n (-1)^l \binom{n}{n-l} (n-l)! \quad \text{en posant } l = n - k \\ &= \sum_{l=0}^n (-1)^l \binom{n}{l} (n-l)! \quad \text{car } \binom{n}{n-l} = \binom{n}{l} \\ &= \sum_{l=0}^n (-1)^l \frac{n!}{l!(n-l)!} (n-l)! \\ &= n! \sum_{l=0}^n (-1)^l \frac{1}{l!} \end{aligned}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, d_n = n! \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{1}{k!}$$

6. Soit $n \in \mathbb{N}$. Il y a $n!$ distributions au total et d_n distributions sans que personne ne reçoive son cadeau. La probabilité d'effectuer une distribution sans que personne ne reçoive son cadeau est :

$$\frac{d_n}{n!} = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{1}{k!}$$

Partie C : Estimation asymptotique

1. On considère l'hypothèse de récurrence valable pour tout entier $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathcal{H}_n : \forall x \in \mathbb{R}, e^x = \left(\sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \right) + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t dt$$

- Initialisation. Pour $n = 0$, la formule du membre de droite devient pour tout x réel :

$$1 + \int_0^x \frac{(x-t)^0}{0!} e^t dt = 1 + \int_0^x e^t dt = 1 + [e^t]_0^x = e^x$$

Ce qui démontre que $\mathcal{H}_0$ est vraie.

- Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé, on suppose que $\mathcal{H}_n$ est vraie, c'est-à-dire que :

$$e^x = \left(\sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \right) + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t dt \quad (\star)$$

On va effectuer une intégration par parties sur l'intégrale mise en jeu, en posant :

$$\begin{aligned} u'(t) &= \frac{(x-t)^n}{n!} & u(t) &= -\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} \\ v(t) &= e^t & v'(t) &= e^t \end{aligned}$$

Les fonctions u , v , u' et v' sont continues sur l'intervalle d'intégration $[0, x]$, on applique la formule :

$$\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t dt = \left[-\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} e^t \right]_0^x + \int_0^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} e^t dt = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \int_0^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} e^t dt$$

On finit le calcul en reprenant la formule $(\star)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$e^x = \left(\sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \right) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \int_0^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} e^t dt = \left(\sum_{k=0}^{n+1} \frac{x^k}{k!} \right) + \int_0^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} e^t dt$$

Ce qui est bien la formule au rang $n+1$, $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, e^x = \left(\sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \right) + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t dt$$

2. On évalue la relation précédente en $x = -1$, on trouve :

$$e^{-1} = \left(\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \right) + \int_0^{-1} \frac{(-1-t)^n}{n!} e^t dt$$

En intervertissant les bornes de l'intégrale afin de compenser un signe moins, on a :

$$\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} = e^{-1} + \int_{-1}^0 \frac{(-1-t)^n}{n!} e^t dt$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{d_n}{n!} = e^{-1} + \int_{-1}^0 \frac{(-1-t)^n}{n!} e^t dt$$

3. (a) La continuité de f entraîne, par composition, la continuité de $|f|$ ainsi on va pouvoir intégrer ces deux fonctions. Pour tout $t \in [a, b]$, on a : $-|f(t)| \leq f(t) \leq |f(t)|$. On intègre cette relation entre a et b en utilisant la propriété de positivité de l'intégrale :

$$-\int_a^b |f(t)| dt \leq \int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b |f(t)| dt$$

Ce qui démontre que :

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt$$

- (b) On va appliquer l'inégalité précédente mais remarquons auparavant que :

$$\forall t \in [-1, 0], \quad |-1-t| \leq 1 \quad \text{ce qui entraîne que : } \forall t \in [-1, 0], \quad |-1-t|^n \leq 1$$

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\left| \int_{-1}^0 \frac{(-1-t)^n}{n!} e^t dt \right| \leq \int_{-1}^0 \frac{|-1-t|^n}{n!} e^t dt \leq \int_{-1}^0 \frac{1}{n!} e^t dt = \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{e}\right)$$

En résumé pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$0 \leq \left| \int_{-1}^0 \frac{(-1-t)^n}{n!} e^t dt \right| \leq \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{e}\right)$$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{e}\right) = 0$, d'après le théorème d'encadrement :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-1}^0 \frac{(-1-t)^n}{n!} e^t dt = 0$$

4. On reprend la formule trouvée à la question 2., et on passe à la limite quand n tend vers $+\infty$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{d_n}{n!} = e^{-1}$$

Quand le nombre de participants au partage tend vers $+\infty$ la probabilité que chacun reparte avec un cadeau différent du sien tend vers e^{-1} .