Problème

Dans tout ce problème, le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ et les coordonnées des points ou des vecteurs sont relatives à ce repère. On associe à chaque point M de coordonnées (x, y) son affixe $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Si $\overrightarrow{v_1}(x_1, y_1)$ et $\overrightarrow{v_2}(x_2, y_2)$ sont deux vecteurs du plan, on définit le produit scalaire de ces deux vecteurs par : $\overrightarrow{v_1}.\overrightarrow{v_2} = x_1x_2 + y_1y_2$ et le déterminant de ces deux vecteurs par $\det(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}) = x_1y_2 - x_2y_1$.

On pourra utiliser dans tout le devoir les équivalences suivantes :

$$\overrightarrow{v_1} \text{ et } \overrightarrow{v_2} \text{ sont orthogonaux si et seulement si } \overrightarrow{v_1}.\overrightarrow{v_2} = 0$$

$$\overrightarrow{v_1} \text{ et } \overrightarrow{v_2} \text{ sont colinéaires si et seulement si} \det(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}) = 0$$

A-Préliminaires géométriques

1. Soit $z \in \mathbb{C}$.
   (a) Donner et démontrer une condition nécessaire et suffisante portant sur z et $\overline{z}$ pour que $z \in \mathbb{R}$.
   (b) Donner et démontrer une condition nécessaire et suffisante portant sur z et $\overline{z}$ pour que $z \in i\mathbb{R}$.
2. On considère deux vecteurs non nuls du plan $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$ d'affixes respectives $z_1 = x_1 + iy_1$ et $z_2 = x_2 + iy_2$ avec $(x_1, x_2, y_1, y_2) \in \mathbb{R}^4$.
   (a) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{v_1}.\overrightarrow{v_2}$ et le déterminant $\det(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2})$ en fonction de z_1, $\overline{z_1}$, z_2 et $\overline{z_2}$.
   (b) En déduire les équivalences suivantes :

$$\overrightarrow{v_1} \text{ et } \overrightarrow{v_2} \text{ sont orthogonaux si et seulement si } \frac{z_2}{z_1} \in i\mathbb{R}$$

$$\overrightarrow{v_1} \text{ et } \overrightarrow{v_2} \text{ sont colinéaires si et seulement si } \frac{z_2}{z_1} \in \mathbb{R}.$$

3. On considère A, B et C trois points non alignés du plan d'affixes respectives a, b et c. On note Δ_{AB}, Δ_{BC} et Δ_{CA} les médiatrices des segments $[AB]$, $[BC]$ et $[CA]$.
   (a) Montrer que pour un point M du plan d'affixe z, on a :

$$M \in \Delta_{AB} \Longleftrightarrow (\overline{b} - \overline{a})z + (b - a)\overline{z} = b\overline{b} - a\overline{a}$$

   (b) De même, donner sans calcul les équations complexes de Δ_{BC} et Δ_{CA}.
   (c) Démontrer que $(\overline{b} - \overline{a})(c - a) - (\overline{c} - \overline{a})(b - a)$ ne peut pas être nul.
   (d) Démontrer que Δ_{AB} et Δ_{CA} sont sécantes.
   (e) Démontrer qu'un point $M(z)$ du plan appartient à $\Delta_{AB} \cap \Delta_{CA}$ si et seulement si :

$$z = \frac{ab(\overline{b} - \overline{a}) + bc(\overline{c} - \overline{b}) + ca(\overline{a} - \overline{c})}{a\overline{b} - b\overline{a} + b\overline{c} - c\overline{b} + c\overline{a} - a\overline{c}}$$

   On note Ω le point du plan dont l'affixe ω est le complexe donné ci-dessus.
   (f) Retrouver ainsi le résultat classique qui affirme que les médiatrices du triangle ABC sont concourantes en Ω.

B-Droite de Simson

On se donne de nouveau, et pour toute la partie, trois points A, B et C du plan non alignés et on note toujours a, b et c leurs affixes respectives.

1. En utilisant les résultats de la partie A, justifier qu'il existe un point Ω d'affixe ω, un réel r strictement positif et $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tels que $\begin{cases} a = \omega + re^{i\alpha} \\ b = \omega + re^{i\beta} \\ c = \omega + re^{i\gamma} \end{cases}$. On donnera l'interprétation géométrique de Ω et r.
2. À l'aide de la technique de l'angle moitié, donner le module et un argument de $b - a$. Justifier que α, β et γ sont distincts modulo 2π.
3. Soit M un point d'affixe z. On note A', B' et C' les projetés orthogonaux de M sur les droites (BC), (AC) et (AB) et a', b' et c' leur affixes respectives.
   (a) Que peut-on dire des vecteurs $\overrightarrow{MA'}$ et $\overrightarrow{BC}$? de $\overrightarrow{BA'}$ et $\overrightarrow{BC}$? de $\overrightarrow{CA'}$ et $\overrightarrow{BC}$?
   (b) Donner $\dfrac{c-b}{\overline{c}-\overline{b}}$ en fonction de γ et β.
   (c) En déduire que $a' = \dfrac{z+b}{2} - \dfrac{\overline{z}-\overline{b}}{2}e^{i(\beta+\gamma)} = \dfrac{z+c}{2} - \dfrac{\overline{z}-\overline{c}}{2}e^{i(\beta+\gamma)}$.
   (d) Donner, sans calcul, des expressions semblables pour b' et c'.
4. On suppose dans cette question et dans la suivante que M est distinct de B.
   (a) Démontrer que $\dfrac{c'-b'}{a'-c'} = e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}} \times \dfrac{\sin(\frac{\gamma-\beta}{2})}{\sin(\frac{\alpha-\gamma}{2})} \times \dfrac{\overline{z}-\overline{a}}{\overline{z}-\overline{b}}$.
   (b) A l'aide des expressions de la question 1., exprimer les nombres complexes $\overline{a}e^{i(\alpha-\beta)} - \overline{b}$ et $be^{i(\alpha-\beta)} - a$ en fonction de ω, α et β.
   (c) Donner une expression du nombre complexe $\overline{a}be^{i(\alpha-\beta)} - a\overline{b}$ en fonction de ω, α, β et r.
5. Déduire de la question précédente que $\dfrac{c'-b'}{a'-c'}$ est réel si et seulement si $z\overline{z} - z\overline{\omega} - \overline{z}\omega + \omega\overline{\omega} - r^2 = 0$.
6. Montrer que A', B' et C' sont alignés si et seulement si M appartient au cercle circonscrit au triangle ABC. On notera ce cercle Γ . Réaliser un dessin soigné illustrant cette situation géométrique.
   La droite joignant A', B' et C' s'appelle la droite de Simson du point M.

C-Droite de Steiner

On reprend les notations de la partie B et on note H d'affixe h l'orthocentre du triangle ABC. On rappelle que l'orthocentre est le point de concours des trois hauteurs, on pourra utiliser ce fait sans le redémontrer.

1. Vérifier que $h = \omega + r(e^{i\alpha} + e^{i\beta} + e^{i\gamma})$.
2. Montrer que les symétriques orthogonaux de H par rapport aux trois côtés du triangle appartiennent au cercle Γ.
3. Soit M un point de Γ autre que A, B et C. On appelle A'', B'' et C'' les symétriques orthogonaux de M par rapport aux droites (BC), (AC) et (AB) respectivement.
   (a) Quelle application géométrique simple laissant M fixe, transforme A' en A'', B' en B'' et C' en C'' ?
   (b) En déduire que A'', B'' et C'' sont alignés. Réaliser un dessin soigné illustrant la situation.
   Cette droite s'appelle la droite de Steiner de M.
   (c) Prouver que H appartient à la droite de Steiner de M.