

1-Donner les limites de la fonction $\log_a$ aux bornes de son ensemble de définition.

2-Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi^x}{x^{100}}$.

3-Soit $a \in]0, 1[$ et $\alpha < 0$ déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x x^\alpha$.

4-Déterminer : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln(x))$.

5-Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $1 < a < b$. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^{(b^x)}}{b^{(a^x)}}$.

1-Donner les limites de la fonction $\log_a$ aux bornes de son ensemble de définition.

Réponse : Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a :

$$\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$$

- Si $a > 1$, on a : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a(x) = +\infty$.
- Si $a \in]0, 1[$, on a : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a(x) = -\infty$.

2-Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi^x}{x^{100}}$.

Réponse : D'après les résultats vus en cours sur les croissances comparées, pour $a > 1$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, on a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x}{x^\alpha} = +\infty$$

Ce résultat s'applique ici directement et on trouve :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi^x}{x^{100}} = +\infty$$

3-Soit $a \in]0, 1[$ et $\alpha < 0$ déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x x^\alpha$.

Réponse : Comme $a \in]0, 1[$, on a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$ et comme $\alpha < 0$, on a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha = 0$. Ainsi, nous ne sommes pas en présence d'une forme indéterminée et on en déduit que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x x^\alpha = 0$$

4-Déterminer : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln(x))$.

Réponse : On a :

$$x - \ln(x) = x \left(1 - \frac{\ln(x)}{x} \right) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$$

$$\text{car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0.$$

5-Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $1 < a < b$. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^{(b^x)}}{b^{(a^x)}}$.

Réponse : Pour $x > 0$, on a :

$$\frac{a^{(b^x)}}{b^{(a^x)}} = \frac{e^{b^x \ln(a)}}{e^{a^x \ln(b)}} = e^{b^x \ln(a) - a^x \ln(b)}$$

C'est encore une forme indéterminée, nous devons mettre en facteur le terme qui nous semble prépondérant, ici b^x puisque $b > a > 1$.

$$\frac{a^{(b^x)}}{b^{(a^x)}} = e^{b^x (\ln(a) - (\frac{a}{b})^x \ln(b))}$$

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{a}{b}\right)^x = 0$ car $\frac{a}{b} \in]0, 1[$. Ainsi $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^{(b^x)}}{b^{(a^x)}} = +\infty$