1. Vrai ou faux : si $f : E \to F$ est non injective alors elle est surjective.

2. Est-il possible de trouver une application de $E = \{a, b, c\}$ dans lui-même qui est surjective mais pas injective ?

3. Soit E un ensemble non vide et A une partie non vide de E. On considère l'application de $\mathcal{P}(E)$ dans lui-même : $f : X \mapsto X \cup A$. Etudier l'injectivité et la surjectivité de f.

4. Combien existe-t'il d'injections de $\{a, b, c\}$ dans $\{1, 2, 3, 4, 5\}$?

5. Donner une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ injective et non surjective. Même question avec surjective mais non injective.

6. Est-il possible de trouver une bijection continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^*$?

7. ★ Est-il possible de trouver une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^*$?

8. ★ Soient f et g deux bijections de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$. Montrer que $h : k \mapsto f(k)g(k)$ n'est pas une bijection de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$.

1. Vrai ou faux : si $f : E \to F$ est une application non injective alors elle est surjective.

Réponse : C'est faux. La fonction *cos* définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ n'est ni injective ni surjective. Les termes "injectif" et "surjectif" ne s'opposent pas.

2. Est-il possible de trouver une application de $E = \{a, b, c\}$ dans lui-même qui est surjective mais pas injective ?

Réponse : C'est impossible. On suppose f surjective mais non injective. L'un des éléments parmi a, b et c a au moins deux antécédents. Supposons que a possède deux (ou trois) antécédents alors b ou c n'aura pas d'antécédent, ce qui contredit la surjectivité.

3. Soit E un ensemble non vide et A une partie non vide de E. On considère l'application de $\mathcal{P}(E)$ dans lui-même : $f : X \mapsto X \cup A$. Etudier l'injectivité et la surjectivité de f.

Réponse : • L'application f n'est pas surjective car $\emptyset$ n'a pas d'antécédent. En effet, il est impossible que $f(X) = X \cup A = \emptyset$ puisque A est non vide.

• Elle n'est pas non plus injective car :

$$f(\emptyset) = f(A) = A \text{ avec pourtant } \emptyset \neq A$$

4. Combien existe-t'il d'injections de $\{a, b, c\}$ dans $\{1, 2, 3, 4, 5\}$?

Réponse : Nous avons 5 choix pour l'image de a, puis 4 choix pour l'image de b et enfin 3 choix restants pour l'image de c. Au total : $5 \times 4 \times 3 = 60$ injections de $\{a, b, c\}$ dans $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

5. Donner une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ injective et non surjective. Même question avec surjective mais non injective.

Réponse : L'application $f : n \mapsto n+1$ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ est clairement injective mais non surjective car 0 n'a pas d'antécédent.

L'application g définie de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ par $g(n) = n-1$ si $n \geq 1$ et 0 si $n = 0$ est clairement surjective mais non injective car 0 a deux d'antécédents.

6. Est-il possible de trouver une bijection continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^*$?

Réponse : C'est impossible. Par l'absurde, si l'on note $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$ une bijection alors -1 et 1 ont des antécédents par f, par continuité de f (d'après le théorème des valeurs intermédiaires) 0 admet également un antécédent par f. Ceci est absurde car f est à valeurs dans $\mathbb{R}^*$.

7. Est-il possible de trouver une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^*$?

Réponse : C'est possible, on pose :

$$f : \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^* \\ x & \mapsto & \begin{cases} x & \text{si } x \in]-\infty, 0[\\ x+1 & \text{si } x \in \mathbb{N} \\ x & \text{si } x \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{N} \end{cases} \end{array}$$

8. ★ Soient f et g deux bijections de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$. Montrer que $h : k \mapsto f(k)g(k)$ n'est pas une bijection de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$.

Réponse : Par l'absurde, si h est une bijection alors il existe a et b deux entiers distincts tels que : $h(a) = f(a)g(a) = 1$ et $h(b) = f(b)g(b) = -1$. Comme nous travaillons avec des entiers, on a $f(a) = g(a) = \pm 1$ et $f(b) = -g(b) = \pm 1$. Comme f est injective, on a $f(a) \neq f(b)$ donc $f(a) = -f(b)$. Ceci implique $g(a) = g(b)$ ce qui contredit l'injectivité de g.

On en déduit que h est une bijection.