Exercice 1

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction adaptée au problème est la fonction :

$$g_n \ : \ \begin{array}{ccc} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) - x^n \end{array}$$

La fonction g_n est continue sur $[0,1]$ car f est continue sur $[0,1]$ et $x \mapsto -x^n$ est continue sur $[0,1]$ car polynomiale. De plus, $g_n(0) = f(0) \geq 0$ et $g_n(1) = f(1) - 1 \leq 0$ car f est à valeurs dans $[0,1]$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $a_n \in [0,1]$ tel que $g_n(a_n) = 0$, c'est-à-dire :

$$\boxed{\exists a_n \in [0,1],\ f(a_n) = a_n^n}$$

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f est décroissante sur $[0,1]$ et la fonction $x \mapsto -x^n$ est strictement décroissante sur $[0,1]$. Par somme, la fonction g_n est strictement décroissante sur $[0,1]$. Ainsi g_n s'annule au plus une fois et donc exactement une fois d'après la question précédente.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \exists! a_n \in [0,1],\ f(a_n) = a_n^n}$$

Dans cette question, nous avons utilisé le fait qu'une fonction strictement monotone est injective.

(b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{array}{rcl} g_{n+1}(a_n) & = & f(a_n) - a_n^{n+1} \\ & = & a_n^n - a_n^{n+1} \\ & = & a_n^n(1 - a_n) \geq 0 \end{array}$$

En utilisant le fait que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n \in [0,1]$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ g_{n+1}(a_n) \geq 0}$$

Or $g_{n+1}(a_{n+1}) = 0$ ainsi nous venons de démontrer que $g_{n+1}(a_n) \geq g_{n+1}(a_{n+1})$. La fonction g_{n+1} étant strictement décroissante sur $[0,1]$ cela implique que $a_n \leq a_{n+1}$

$$\boxed{(a_n) \text{ est croissante}}$$

(c) La suite (a_n) est croissante et majorée par 1, elle converge vers une limite réelle a. De plus, pour tout entier naturel non nul n, on a : $0 \leq a_n \leq 1$ donc en passant à la limite : $a \in [0,1]$.

$$\boxed{\text{La suite } (a_n) \text{ converge vers } a \in [0,1]}$$

3. (a) La fonction f est clairement continue en tout point de $\left[0, \frac{1}{2}\right[$ car elle est polynomiale sur cet intervalle. De même, f est continue sur $\left]\frac{1}{2}, 1\right]$. Il reste à examiner la continuité en $\frac{1}{2}$. On a :

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}^-} f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2 \times \frac{1}{2} + \frac{3}{4} = 0 = f\left(\frac{1}{2}\right) \text{ et}$$

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}^+} f(x) = 0 = f(0)$$

Ainsi, f est continue à gauche et à droite au point $\frac{1}{2}$ donc elle est continue en $\frac{1}{2}$.

$$\boxed{f \text{ est continue sur } [0,1]}$$

(b) Soit $(x,y) \in [0,1]^2$ tels que $x \leq y$, démontrons que $f(x) \geq f(y)$. Il y a plusieurs cas à considérer :

- si $0 \leq x \leq y \leq \frac{1}{2}$, alors :

$$f(y) - f(x) = y^2 - x^2 - 2(y-x) = (y-x)(y+x-2) \leq 0$$

Dans ce cas, on a bien $f(y) \leq f(x)$.

- si $x \leq \frac{1}{2} \leq y$, alors :

$$f(x) = x^2 - 2x + \frac{3}{4} = (x-1)^2 - \frac{1}{4} \geq 0 = f(y)$$

Dans ce cas aussi, on a $f(y) \leq f(x)$.

- si $\frac{1}{2} < x \leq y$, alors $f(y) = 0 \leq 0 = f(x)$.

$$\boxed{f \text{ est décroissante sur } [0,1]}$$

(c) La fonction f étant continue et décroissante sur le segment $[0,1]$, on a : $f([0,1]) = [f(1), f(0)] = \left[0, \frac{3}{4}\right]$.

$$\boxed{f \text{ est à valeurs dans } [0,1]}$$

(d) Les questions (a), (b) et (c) ont permis de vérifier que l'on est dans les hypothèses des questions 1. et 2. dont on va pouvoir utiliser les résultats. D'après l'étude de la question 2., on sait que la suite (a_n) est croissante et converge vers une limite $a \in [0,1]$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $a_n \leq \frac{1}{2}$. En effet, supposons par l'absurde que $a_n > \frac{1}{2}$ alors $f(a_n) = 0 = a_n^n$ donc $a_n = 0$ ce qui est contradictoire.
Pour tout entier naturel non nul n, on a :

$$0 \leq a_n^n \leq \frac{1}{2^n}$$

D'après le théorème d'encadrement, ceci implique que :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} a_n^n = 0}$$

(e) Pour tout entier naturel non nul n, puisque $a_n \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, on a :

$$a_n^n = f(a_n) = a_n^2 - 2a_n + \frac{3}{4}$$

En passant à la limite dans l'égalité précédente, il vient : $0 = a^2 - 2a + \frac{3}{4}$. Cela implique que $a = \frac{1}{2}$ ou $a = \frac{3}{2}$. Or $a \in [0,1]$ donc :

$$\boxed{a = \frac{1}{2}}$$

Exercice 2

Cet exercice est à rapprocher de l'exemple du cours portant sur la recherche des fonctions continues, définies sur $\mathbb{R}$ et vérifiant :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y) = f(x) + f(y)$$

La démarche suivie est la même, déterminer la fonction sur $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ puis, par densité, sur $\mathbb{R}$.

1. D'après le cours, pour $a \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction exponentielle en base a : $g\ :\ x \mapsto a^x$ est continue sur $\mathbb{R}$ et plus :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ g(x+y) = a^{x+y} = a^x a^y = g(x)g(y)$$

D'autre part, g n'est pas la fonction nulle car $g(0) = 1$.

$$\boxed{g \in E}$$

2. (a) En utilisant la relation de l'énoncé avec $x = y = 0$, on a : $f(0) = f(0)^2$. Ce qui implique que $f(0) = 0$ ou $f(0) = 1$. Supposons par l'absurde que $f(0) = 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a alors :

$$f(x) = f(x+0) = f(x)f(0) = 0$$

C'est contradictoire avec l'hypothèse f non nulle.

$$\boxed{f(0) = 1}$$

(b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $1 = f(0) = f(x-x) = f(x)f(-x)$. Ce qui démontre que :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq 0}$$

(c) • Soient $(f,g) \in E^2$, on a f et g continues sur $\mathbb{R}$, donc par produit fg est continue sur $\mathbb{R}$. De plus $(fg)(0) = f(0)g(0) = 1 \neq 0$, ainsi fg n'est pas la fonction nulle. Enfin :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ (fg)(x+y) = f(x+y)g(x+y) = f(x)f(y)g(x)g(y) = (fg)(x)(fg)(y)$$

$$\boxed{E \text{ est stable par produit}}$$

• Soit $f \in E$, d'après la question précédente, on sait que f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, ainsi la fonction $\dfrac{1}{f}$ est définie sur $\mathbb{R}$. Elle est continue sur $\mathbb{R}$ car f est continue sur $\mathbb{R}$. Il est clair que la fonction $\dfrac{1}{f}$ n'est pas la fonction nulle. Enfin :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \frac{1}{f}(x+y) = \frac{1}{f(x+y)} = \frac{1}{f(x)f(y)} = \frac{1}{f}(x)\frac{1}{f}(y)$$

$$\boxed{E \text{ est stable par passage à l'inverse}}$$

3. (a) On procède par récurrence sur l'entier naturel n :

$$\mathcal{P}_n\ :\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(nx) = f(x)^n$$

• **Initialisation.** $f(0) = 1$, ce qui démontre la formule au rang $n = 0$.
• **Hérédité.** On suppose $\mathcal{P}_n$ vérifiée pour un entier naturel n fixé. On a :

$$f((n+1)x) = f(nx+x) = f(nx)f(x) = f(x)^n f(x) = f(x)^{n+1}$$

Ce qui achève la récurrence :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(nx) = f(x)^n}$$

(b) Soit $n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$, on a : $-n \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$f(nx - nx) = f(0) = f(nx)f(-nx)$$

Or $f(-nx) = f(x)^{-n}$, d'après la question précédente. On en déduit que : $f(nx) = \dfrac{f(0)}{f(x)^{-n}} = f(x)^n$ car $f(0) = 1$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{Z},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(nx) = f(x)^n}$$

(c) La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ et elle ne s'annule pas d'après la question 1.(b), d'après le théorème des valeurs intermédiaires, elle garde un signe constant sur $\mathbb{R}$. Or $f(0) = 1$ donc f est strictement positive sur $\mathbb{R}$:

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) > 0}$$

(d) Posons $r = \dfrac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$. D'une part : $f(p) = f(p \times 1) = f(1)^p = 1^p = 1$ en utilisant le résultat de la question 3.(b). D'autre part : $f(p) = f\left(q\dfrac{p}{q}\right) = f\left(\dfrac{p}{q}\right)^q = 1$. Or $f\left(\dfrac{p}{q}\right) > 0$ d'après la question précédente, donc $f\left(\dfrac{p}{q}\right) = 1$.

$$\boxed{\forall r \in \mathbb{Q},\ f(r) = 1}$$

(e) La fonction f et la fonction constante égale à 1 coïncident sur $\mathbb{Q}$. Ces deux fonctions étant continues sur $\mathbb{R}$, on en déduit qu'elles coïncident sur $\mathbb{R}$.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 1}$$

4. La fonction f et la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g\ :\ x \mapsto a^x$ sont des éléments de E, d'après la question 2.(c) :

$$h = f \times \frac{1}{g} \in E$$

La fonction h appartient à E et $h(1) = 1$, d'après la question 3. on en déduit que h est la fonction constante égale à 1.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = a^x}$$

5. Les questions 1. et 4. permettent d'affirmer que l'ensemble E est composé des fonctions du type :

$$f\ :\ \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & a^x \end{array}$$

où $a \in \mathbb{R}_+^*$.

Exercice 3

1. (a) On procède par récurrence sur l'entier naturel n en considérant la propriété :

$$\mathcal{H}_n \ : \ \forall k \in [\![0, 2^n]\!], \ f\left(\frac{k}{2^n}\right) = 0$$

• **Initialisation.** On a $f(0) = f(1) = 0$. Ce qui démontre que $\mathcal{H}_0$ est vraie.

• **Hérédité.** Fixons un entier naturel n et supposons que $\mathcal{H}_n$ soit vérifiée. Soit $k \in [\![0, 2^{n+1}]\!]$, démontrons que $f\left(\frac{k}{2^{n+1}}\right) = 0$. On va raisonner selon la parité de k.

▶ si k est pair alors $k = 2j$ où $j \in [\![0, 2^n]\!]$. On a alors :

$$f\left(\frac{k}{2^{n+1}}\right) = f\left(\frac{j}{2^n}\right) = 0 \text{ d'après l'hypothèse de récurrence}$$

▶ si k est impair alors $k = 2j+1$ où $0 \leq j < 2^n$. On a :

$$f\left(\frac{k}{2^{n+1}}\right) = f\left(\frac{2j+1}{2^{n+1}}\right) = f\left(\frac{1}{2}\left(\frac{j}{2^n} + \frac{j+1}{2^n}\right)\right) = 0$$

Ceci en utilisant l'hypothèse faite sur la fonction f car $f\left(\frac{j}{2^n}\right) = f\left(\frac{j+1}{2^n}\right) = 0$.
Les deux cas traités achèvent la récurrence.

$$\boxed{\forall k \in [\![0, 2^n]\!], \ f\left(\frac{k}{2^n}\right) = 0}$$

Tout cela se comprend très bien graphiquement, f est nulle en 0 et en 1 donc en $\frac{1}{2}$, puis en $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$...

(b) Soit $a \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}$. L'inégalité $\frac{k_n}{2^n} \leq a \leq \frac{1+k_n}{2^n}$ est équivalente à $k_n \leq 2^n a < 1 + k_n$. Cette dernière inégalité est vraie pour le seul entier $k_n = E(2^n a)$, par définition de la partie entière.

$$\boxed{\forall a \in [0,1], \ \forall n \in \mathbb{N}, \ \exists! k_n \in \mathbb{N}, \ \frac{k_n}{2^n} \leq a \leq \frac{1+k_n}{2^n}}$$

(c) Pour tout entier naturel n, d'après l'encadrement de la question précédente, on a : $0 \leq a - \frac{k_n}{2^n} \leq \frac{1}{2^n}$. En utilisant le théorème d'encadrement, il vient :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} \frac{k_n}{2^n} = a}$$

La fonction f étant continue sur $[0,1]$, en utilisant le théorème de caractérisation séquentielle de la continuité, on a : $\lim_{n \to +\infty} f\left(\frac{k}{2^n}\right) = f(a)$. D'après la question (a), on sait que pour tout entier naturel n, $f\left(\frac{k}{2^n}\right) = 0$. En effet $k_n \geq 0$ car $k_n = E(2^n a)$ avec $a \in [0,1]$ et $k_n \leq 2^n$ car $\frac{k_n}{2^n} \leq a \leq 1$. On a démontré que $f(a) = 0$ ceci pour a quelconque dans l'intervalle $[0,1]$.

$$\boxed{f \text{ est la fonction nulle}}$$

2. (a) Soit $h\ :\ x \mapsto ax+b$ où $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, on souhaite avoir :

$$\left\{\begin{array}{l} h(0)=g(0)\\ h(1)=g(1)\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} b=g(0)\\ a+b=g(1)\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} b=g(0)\\ a=g(1)-g(0)\end{array}\right.$$

$$\boxed{h\ :\ x\mapsto (g(1)-g(0))x+g(0)}$$

(b) Démontrons tout d'abord que la fonction h vérifie également la condition $(\mathcal{C})$:

$$\forall (x,y)\in[0,1]^2,\ \frac{1}{2}\Big(h(x)+h(y)\Big)=\frac{1}{2}\Big(ax+b+ay+b\Big)=a\Big(\frac{x+y}{2}\Big)+b=h\Big(\frac{x+y}{2}\Big)$$

Démontrons à présent que $f=g-h$ vérifie les conditions de la question 1. On a : $f(0)=g(0)-h(0)=0$ car par construction $g(0)=h(0)$ et de même $f(1)=g(1)-h(1)=0$. Supposons que $f(x)=f(y)=0$ pour $(x,y)\in[0,1]^2$, on a :

$$f\Big(\frac{x+y}{2}\Big)=g\Big(\frac{x+y}{2}\Big)-h\Big(\frac{x+y}{2}\Big)=\frac{1}{2}\Big(g(x)+g(y)\Big)-\frac{1}{2}\Big(h(x)+h(y)\Big)=\frac{1}{2}\Big(f(x)+f(y)\Big)=0$$

Dans ce calcul, on a utilisé le fait que g et h vérifient la condition $(\mathcal{C})$.
La fonction f vérifie l'hypothèse de la question 1., d'après l'étude menée dans cette question, c'est la fonction nulle. Finalement $g=h$ et g est une fonction affine. Une fonction de l'ensemble E est une fonction affine et réciproquement les fonctions affines sont continues sur $[0,1]$ et nous avons vu qu'elles vérifient la condition $(\mathcal{C})$.

$$\boxed{\text{L'ensemble recherché est l'ensemble des fonctions affines sur } [0,1]}$$