1-Déterminer $\lim_{x \to 0} \frac{\tan(x)}{x}$ et $\lim_{x \to 0} \frac{\cos(x)}{x}$.

2-Déterminer $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)^2}{x\tan(3x)}$.

3-★ Déterminer $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x+3}{x}\right)^{2x}$

1-Déterminer $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos(x)}{x}$.

Réponse : • Pour $x \neq 0$, on a :

$$\frac{\tan(x)}{x} = \frac{\tan(x) - \tan(0)}{x - 0} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} \tan'(0) = 1 + \tan^2(0) = 1$$

• La limite de $\dfrac{\cos(x)}{x}$ quand x tend vers 0 n'existe pas puisque :

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{\cos(x)}{x} = -\infty \text{ et } \lim_{x \to 0^+} \frac{\cos(x)}{x} = +\infty$$

2-Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)^2}{x\tan(3x)}$.

Réponse : On va faire apparaitre des taux de variation. Pour $x \in \mathbb{R}^*$, on a :

$$\frac{\sin(x)^2}{x\tan(3x)} = \frac{\sin(x)^2}{x^2} \times \frac{3x}{\tan(3x)} \times \frac{1}{3}$$

Or $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan(3x)}{3x} = 1$ en reconnaissant des limites dans les deux cas des taux de variations classiques. Finalement :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)^2}{x\tan(3x)} = \frac{1}{3}$$

3-★ Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x+3}{x}\right)^{2x}$

Réponse : Pour $x > 0$, on a :

$$\left(\frac{x+3}{x}\right)^{2x} = e^{2x\ln\left(\frac{x+3}{x}\right)} = e^{2x\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)}$$

On transforme l'expression dans l'exponentielle pour faire apparaitre un taux de variation :

$$2x\ln\left(1+\frac{3}{x}\right) = 2x\frac{\ln\left(1+\frac{3}{x}\right) - \ln(1+0)}{\frac{3}{x} - 0} \times \frac{3}{x}$$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3}{x} = 0$ et $\lim\limits_{y\to 0} \dfrac{\ln(1+y)-\ln(1+0)}{y-0} = 1$ donc, par composition de limites :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)-\ln(1+0)}{\frac{3}{x}-0} = 1$$

Finalement :

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x+3}{x}\right)^{2x} = e^6$$