A-Calculs de base

1. Soit $n \in \mathbb{N}$, donner le signe de $u_n = -\frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2}$.

Corrigé : Pour $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_n = -\frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{n+1} = -\frac{1}{2}\frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n+1} = -\frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} \underline{\geq 0}$$

2. On pose $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n}$. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = \frac{F_{n+2}}{F_{n+1}}$ où (F_n) désigne (bien sûr !) la suite de Fibonacci.

Corrigé : On démontre la propriété annoncée par récurrence sur $\mathbb{N}$.

- Pour $n = 0$, on a $\frac{F_2}{F_1} = \frac{1}{1} = 1 = u_0$ comme voulu.
- On suppose que $u_n = \frac{F_{n+2}}{F_{n+1}}$ pour un entier naturel n fixé. D'après la relation qui définie, nous avons :

$$u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n} = 1 + \frac{F_{n+1}}{F_{n+2}} = \frac{F_{n+2} + F_{n+1}}{F_{n+2}} = \frac{F_{n+3}}{F_{n+2}}$$

Ce qui démontre le résultat au rang $n+1$ et termine la récurrence.

$$\underline{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{F_{n+2}}{F_{n+1}}}$$

3. Écrire à l'aide notamment d'une factorielle le produit des entiers pairs de 2 à $2n$ où $n \in \mathbb{N}^*$.

Corrigé : Ce produit s'écrit :

$$\prod_{k=1}^{n} (2k) = 2^n \prod_{k=1}^{n} k = \underline{2^n \times n!}$$

4. Déterminer l'ensemble de définition et le signe de la fonction $x \mapsto \frac{x^3 - 1}{x^3 + 1}$.

Corrigé : La fonction est clairement définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$. On a $x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1)$ et $x^3 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1)$. Remarquons que les deux trinômes $x^2 + x + 1$ et $x^2 - x + 1$ sont strictement positifs sur $\mathbb{R}$ puisque leur discriminant est négatif. Ainsi le quotient $\frac{x^3-1}{x^3+1}$ est du signe de $\frac{x-1}{x+1}$. On trouve ce signe sans difficulté avec un tableau de signe :

$$\underline{\frac{x^3-1}{x^3+1} \geq 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -1[\cup [1, +\infty[}$$

B-Sommes et produits

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, simplifier $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{k}{k+2}$.

Corrigé : On fait apparaitre deux produits télescopiques :

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{k}{k+2} = \prod_{k=1}^{n} \frac{k}{k+1} \times \frac{k+1}{k+2} = \prod_{k=1}^{n} \frac{k}{k+1} \times \prod_{k=1}^{n} \frac{k+1}{k+2} = \frac{1}{n+1} \times \frac{2}{n+2} = \underline{\frac{2}{(n+1)(n+2)}}$$

6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, simplifier $\displaystyle\sum_{k=4}^{n+3} (2k+1)$.

Corrigé : On reconnait la somme des termes d'une suite arithmétique de raison 2, le premier terme est 9 et le dernier vaut $2n+7$. Le nombre de termes est n, d'où :

$$\sum_{k=4}^{n+3} (2k+1) = \frac{(9+2n+7) \times n}{2} = \underline{(n+8)n}$$

7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, simplifier $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 3^{2k-1}$.

Corrigé : On fait apparaitre la somme des termes d'une suite géométrique :

$$\sum_{k=1}^{n} 3^{2k-1} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{n} 9^k = \frac{1}{3} \times 9 \times \frac{9^n - 1}{9-1} = \underline{\frac{3}{8}(9^n - 1)}$$

8. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, simplifier $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 5^{n-k}$.

Corrigé : On applique la formule du binôme de Newton :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 5^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 5^{n-k} = (1+5)^n = \underline{6^n}$$

9. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, calculer : $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$.

Corrigé : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![1, n]\!]$, on cherche à décomposer la fraction comme une somme de deux fractions plus simples. C'est-à-dire que l'on cherche $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tels que :

$$\frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{\alpha}{2k-1} + \frac{\beta}{2k+1}$$

En réduisant au même dénominateur et en identifiant les numérateurs, on obtient :

$$\frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\Big)$$

On en déduit que :

$$S_n = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\Big) = \frac{1}{2}\Big(1 - \frac{1}{2n+1}\Big)$$

ceci en reconnaissant une somme télescopique.

$$\underline{S_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{4n+2}}$$

C-Limites

10. $\boxed{\text{Déterminer } \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{Arctan}(x)}{x}.}$

Corrigé : Pour $x \neq 0$, on a :

$$\frac{\mathrm{Arctan}(x)}{x} = \frac{\mathrm{Arctan}(x) - \mathrm{Arctan}(0)}{x-0} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \mathrm{Arctan}'(0) = \underline{1}$$

ceci en reconnaissant le taux d'accroissement de la fonction Arctan en 0.

11. $\boxed{\text{Déterminer } \lim_{x\to 0^-} \frac{\mathrm{Arccos}(x)}{x}.}$

Corrigé : Ce n'est pas une forme indéterminée, on a :

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\mathrm{Arccos}(x)}{x} = \underline{-\infty}$$

12. $\boxed{\text{Calculer } \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+4x+3} + x + 2.}$

Corrigé : Ce n'est pas une forme indéterminée :

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+4x+3} + x + 2 = \underline{+\infty}$$

13. Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+4x+3}+x+2$.

Corrigé : Ici, c'est bien une forme indéterminée, on multiplie par la quantité conjuguée, c'est égal à

$$\sqrt{x^2+4x+3}+x+2\frac{(\sqrt{x^2+4x+3}+x+2)(\sqrt{x^2+4x+3}-(x+2))}{\sqrt{x^2+4x+3}-(x+2)} = \frac{(x^2+4x+3)-(x+2)^2}{\sqrt{x^2+4x+3}-(x+2)}$$

Le numérateur se simplifie, il reste : $\dfrac{-1}{\sqrt{x^2+4x+3}-(x+2)}$. Quand x tend vers $-\infty$, ce n'est plus indéterminé et :

$$\underline{\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+4x+3}+x+2 = 0}$$

14. Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^3+x^2+5}{5x^3-x^2+2}$

Corrigé : La limite en $+\infty$ ou $-\infty$ d'une fraction rationnelle est la limite des termes de plus haut de degré :

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3+x^2+5}{5x^3-x^2+2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3}{5x^3} = \underline{\frac{1}{5}}$$

15. Déterminer $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{x}-2}{x^2-5x+4}$.

Corrigé : Le trinôme au dénominateur se factorise une fois que l'on a trouvé ses racines. Pour tout $x>0$, on a :

$$x^2-5x+4 = (x-1)(x-4) = (x-1)(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)$$

Ainsi :

$$\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x^2-5x+4} = \lim_{x\to 4} \frac{1}{(x-1)(\sqrt{x}+2)} = \frac{1}{12}$$

$$\underline{\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x^2-5x+4} = \frac{1}{12}}$$

16. ★ Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{\frac{1}{x}}\sqrt{x(x+2)}+x$.

Corrigé : On a :

$$\begin{aligned}
e^{\frac{1}{x}}\sqrt{x(x+2)}+x &= e^{\frac{1}{x}}(\sqrt{x(x+2)}+x) - x(e^{\frac{1}{x}}-1) \\
&= e^{\frac{1}{x}}\frac{2x}{\sqrt{x(x+2)}-x} - \frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}} \qquad \text{en multipliant par la quantité conjuguée} \\
&= e^{\frac{1}{x}}\frac{-2}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1} - \frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}} \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} \frac{-2}{1+1} - 1 = -2
\end{aligned}$$

La dernière égalité provient de la simplification par $-x = |x| = \sqrt{x^2}$. On a également reconnu le taux de variation de la fonction exponentielle en 0, en effet : $\lim_{y \to 0} \frac{e^y - 1}{y} = 1$.

$$\underline{\lim_{x \to -\infty} e^{\frac{1}{x}} \sqrt{x(x+2)} + x = -2}$$

D-Équations et inéquations

17. Trouver tous les x réels tels que : $|x+5| \leq 100$.

Corrigé : On a :

$$|x+5| \leq 100 \Leftrightarrow -100 \leq x+5 \leq 100 \Leftrightarrow \underline{-105 \leq x \leq 95}$$

18. Trouver tous les x réels tels que : $|2x| - |2x+2| + |x+3| \leq 3$.

Corrigé : On distingue plusieurs cas selon le signe des expressions présentes dans les valeurs absolues :

• Si $x < -3$, l'inéquation devient : $-2x + (2x+2) - (x+3) \leq 3$. Cela nous donne : $-x \leq 4$, c'est-à-dire $x \geq -4$. Ce qui donne comme ensemble de solution $[-4, -3[$.

• Si $-3 \leq x < -1$, l'inéquation devient : $-2x + (2x+2) + (x+3) \leq 3$. Cela donne : $x \leq -2$. Ce qui donne comme intervalle $[-3, -2]$.

• Si $-1 \leq x < 0$, l'inéquation devient : $-2x - (2x+2) + (x+3) \leq 3$. Cela donne : $-3x \leq 2$, c'est-à-dire $x \geq -\frac{2}{3}$. Ce qui donne comme intervalle $\left[-\frac{2}{3}, 0\right[$.

• Enfin, si $x \geq 0$, l'inéquation devient : $2x - (2x+2) + (x+3) \leq 3$. Cela donne : $x \leq 2$, ce qui donne comme intervalle $[0, 2]$.

Finalement, l'ensemble des solutions est :

$$\underline{[-4, -2] \cup \left[-\frac{2}{3}, 2\right]}$$

19. Trouver tous les x réels vérifiant : $\frac{x-1}{x+1} < \frac{2x+1}{2x}$.

Corrigé : Déjà l'inéquation est définie pour $x \neq 0$ et $x \neq -1$. On réduit au même dénominateur, l'inéquation est équivalente à :

$$\frac{(x-1)2x - (x+1)(2x+1)}{(x+1)(2x)} < 0$$

Ce qui donne après simplifications :

$$\frac{-5x-1}{2x(x+1)} < 0 \Leftrightarrow \frac{5x+1}{2x(x+1)} > 0$$

Un rapide tableau de signe nous permet de voir que l'ensemble des solutions est :

$$\underline{\left]-1,-\frac{1}{5}\right[\cup]0,+\infty[}$$

20. Trouver les réels x vérifiant l'équation : $\sqrt{x^2+3}+\sqrt{x-3}-\sqrt{-x^2+3x-2}=4$.

Corrigé : Avant tout cherchons pour quels réels x l'équation a un sens. On trouve les racines de $-x^2+3x-2$, il s'agit de 1 et 2, ainsi ce trinôme est positif si et seulement si $x\in[1,2]$.

$\sqrt{x^2+3}$	existe pour tout réel x
$\sqrt{x-3}$	existe si et seulement si $x\geq 3$
$\sqrt{-x^2+3x-2}$	existe si et seulement si $x\in[1,2]$

Les deux dernières conditions étant incompatibles :

$$\underline{\text{l'équation n'est définie pour aucun réel } x}$$

21. Résoudre l'équation $x^6+x^4=80$ d'inconnue $x\in\mathbb{R}_+$.

Corrigé : La fonction $x\mapsto x^6+x^4$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ comme somme de fonctions strictement croissantes sur $\mathbb{R}_+$. D'autre part, on remarque que 2 est solution de l'équation, par stricte croissante, c'est la seule.

$$\underline{\mathcal{S}=\{2\}}$$

E-Fonctions usuelles

22. ♡ Donner la valeur de $\operatorname{Arcsin}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Corrigé : $\underline{\operatorname{Arcsin}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\frac{\pi}{3}}$

23. Trouver tous les réels x tels que $e^x+3e^{-x}=4$.

Corrigé : On pose $X=e^x$, l'équation est équivalente à : $X+\frac{3}{X}=4$. En multipliant par X, on obtient :

$$X^2-4X+3=0$$

Cette équation a pour solution $X=1$ et $X=3$. Les solutions de l'équation initiale sont donc :

$$\underline{x=0 \ \text{ et } x=\ln(3)}$$

24. Simplifier $\text{Arccos}\Big(\cos\left(\frac{13\pi}{3}\right)\Big)$.

Corrigé : $\text{Arccos}\Big(\cos\left(\frac{13\pi}{3}\right)\Big) = \text{Arccos}\Big(\cos\left(\frac{13\pi}{3} - 4\pi\right)\Big) = \text{Arccos}\Big(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\Big) = \underline{\frac{\pi}{3}}$

En effet $\frac{\pi}{3} \in [0, \pi]$, intervalle sur lequel nous avons pu faire la simplification.

25. ★ Trouver tous les réels x vérifiant $\ln(1 + x\text{th}(x)) = x$.

Corrigé : D'après l'étude connue de la fonction th, on sait que $x \mapsto x\text{th}(x)$ est à valeurs positives, ainsi le membre de gauche est bien défini. L'équation est équivalente à : $1 + x\text{th}(x) = e^x$.

• On remarque que $x = 0$ est solution.

• Si $x > 0$, $e^x \geq 1 + x \geq 1 + x\text{th}(x)$ car la fonction th est à valeurs dans $]-1, 1[$. Ainsi l'équation ne peut avoir de solution.

• Si $x < 0$, on a $e^x < 1 \leq 1 + x\text{th}(x)$ donc il n'y a pas de solution non plus.

Finalement $x = 0$ est l'unique solution.

26. ★ Résoudre l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$: $\text{Arcsin}(x) + \text{Arcsin}(\sqrt{15}x) = \frac{\pi}{2}$.

Corrigé : Déjà, on doit avoir $x \in [-1, 1]$ et $\sqrt{15}x \in [-1, 1]$, c'est-à-dire $x \in \left[-\frac{1}{\sqrt{15}}, \frac{1}{\sqrt{15}}\right]$. Si $x < 0$, le membre de gauche est négatif tandis que le membre de droite est positif. Prenons $x \in \left[0, \frac{1}{\sqrt{15}}\right]$:

$$\begin{aligned}
\text{Arcsin}(x) + \text{Arcsin}(\sqrt{15}x) = \frac{\pi}{2} \quad &\Leftrightarrow \quad \text{Arcsin}(\sqrt{15}x) = \frac{\pi}{2} - \text{Arcsin}(x) \\
&\Leftrightarrow^{(1)} \quad \sin(\text{Arcsin}(\sqrt{15}x)) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \text{Arcsin}(x)\right) \\
&\Leftrightarrow \quad \sqrt{15}x = \sqrt{1-x^2} \text{ car } \cos(\text{Arcsin}(x)) = \sqrt{1-x^2} \\
&\Leftrightarrow^{(2)} \quad 15x^2 = 1 - x^2 \\
&\Leftrightarrow \quad x^2 = \frac{1}{16} \\
&\Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

L'équivalence (1) est justifiée car $\text{Arcsin}(x)$ et $\text{Arcsin}(\sqrt{15}x)$ appartiennent à $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, intervalle sur lequel la fonction sinus est une bijection à valeurs dans $[0, 1]$. L'équivalence (2) est justifiée car $x \geq 0$.

On a bien $\frac{1}{4} \in \left[0, \frac{1}{\sqrt{15}}\right]$ d'où :

$$\underline{\mathcal{S} = \left\{\frac{1}{4}\right\}}$$

F-Trigonométrie

27. Trouver tous les réels x vérifiant l'équation $(E)\ :\ \cos(2x)+\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=0$.

Corrigé : Par imparité du sinus, l'équation est équivalente à :

$$\cos(2x)=\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$$

Or $\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\left(-x+\frac{3\pi}{4}\right)\right)=\cos\left(-x+\frac{3\pi}{4}\right)$. L'équation devient :

$$\cos(2x)=\cos\left(-x+\frac{3\pi}{4}\right)$$

Ce qui équivaut à :

$$2x=-x+\frac{3\pi}{4}[2\pi] \text{ ou } 2x=x-\frac{3\pi}{4}[2\pi]$$

En simplifiant :

$$\underline{x=\frac{\pi}{4}\left[\frac{2\pi}{3}\right] \text{ ou } x=-\frac{3\pi}{4}[2\pi]}$$

28. Trouver tous les réels x tels que : $\cos(x)+\cos(2x)+\cos(3x)+\cos(4x)=0$.

Corrigé : Notons (E) l'équation. On va réorganiser les termes et utiliser la formule :

$$\forall(a,b)\in\mathbb{R}^2,\ \cos(a)+\cos(b)=2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

Ce qui donne :

$$\begin{aligned}
(E) &\Leftrightarrow (\cos(x)+\cos(4x))+(\cos(2x+\cos(3x))=0\\
&\Leftrightarrow 2\cos\left(\frac{5}{2}x\right)\cos\left(\frac{3}{2}x\right)+2\cos\left(\frac{5}{2}x\right)\cos\left(\frac{1}{2}x\right)=0\\
&\Leftrightarrow 2\cos\left(\frac{5}{2}x\right)\times\left(\cos\left(\frac{3}{2}x\right)+\cos\left(\frac{1}{2}x\right)\right)=0\\
&\Leftrightarrow 4\cos\left(\frac{5}{2}x\right)\cos(x)\cos\left(\frac{1}{2}x\right)=0\\
&\Leftrightarrow \frac{5}{2}x=\frac{\pi}{2}\ [\pi] \text{ ou } x=\frac{\pi}{2}\ [\pi] \text{ ou } \frac{1}{2}x=\frac{\pi}{2}\ [\pi]\\
&\Leftrightarrow \underline{x=\frac{\pi}{5}\ \left[\frac{2\pi}{5}\right] \text{ ou } x=\frac{\pi}{2}\ [\pi] \text{ ou } x=\pi\ [2\pi]}
\end{aligned}$$

29. Trouver tous les réels x tels que : $\cos(x) + \sqrt{3}\sin(x) = 1$.

Corrigé : Pour $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}
\cos(x) + \sqrt{3}\sin(x) = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\cos(x) + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(x) = \frac{1}{2} \\
&\Leftrightarrow \quad \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos(x) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin(x) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \\
&\Leftrightarrow \quad \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \\
&\Leftrightarrow \quad x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3}\ [2\pi] \text{ ou } x - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{3}\ [2\pi] \\
&\Leftrightarrow \quad x = \frac{2\pi}{3}\ [2\pi] \text{ ou } x = 0\ [2\pi]
\end{aligned}$$

$$\underline{\mathcal{S} = \left\{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}}$$

30. Trouver tous les réels x tels que : $\left|\cos\left(3x - \frac{\pi}{3}\right)\right| \geq \frac{1}{2}$.

Corrigé : On pose $y = 3x - \frac{\pi}{3}$ pour simplifier le problème, on a :

$$|\cos(y)| \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos(y) \geq \frac{1}{2} \text{ ou } \cos(y) \leq -\frac{1}{2}$$

C'est équivalent à l'existence de $k \in \mathbb{Z}$:

$$y \in \left[-\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{\pi}{3} + 2k\pi\right] \cup \left[\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \frac{4\pi}{3} + 2k\pi\right]$$

En remplaçant y par $3x - \frac{\pi}{3}$, on obtient l'ensemble des solutions suivant :

$$\underline{\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[\frac{2k\pi}{3}, \frac{2\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}, \frac{5\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}\right]}$$

G-Dérivation

31. Donner l'ensemble de dérivabilité et la dérivée de $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^{\frac{3}{4}}}$.

Corrigé : On a : $f : x \mapsto x^{-\frac{3}{4}}$. Cette fonction puissance est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et :

$$\underline{f' : x \mapsto -\frac{3}{4}x^{-\frac{7}{4}}}$$

32. Donner l'ensemble de dérivabilité et dériver la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$.

Corrigé : On a $f : x \mapsto (x^2+1)^{-\frac{3}{2}}$. Cette fonction est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = -\frac{3}{2}2x(x^2+1)^{-\frac{5}{2}} = \underline{-3x(x^2+1)^{-\frac{5}{2}}}$$

33. Soit $f : x \mapsto \operatorname{Arcsin}(\sqrt{x}) - \dfrac{1}{2}\operatorname{Arcsin}(2x-1)$. Déterminer l'ensemble de définition et de dérivabilité de f. Calculer f' et en déduire une simplification de f.

Corrigé : On rappelle que la fonction Arcsin est définie sur $[-1,1]$ et dérivable sur $]-1,1[$. La fonction f est donc définie pour $x \geq 0$ tel que $\sqrt{x} \leq 1$ et $-1 \leq 2x-1 \leq 1$, c'est-à-dire que l'ensemble de définition est $[0,1]$. Elle est dérivable sur $]0,1[$ et :

$$\forall x \in]0,1[,\ f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\frac{1}{\sqrt{1-x}} - \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{1}{\sqrt{1-(2x-1)^2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}} - \frac{1}{\sqrt{4x(1-x)}} = 0$$

On en déduit que f est constante sur l'intervalle $]0,1[$ et également sur $[0,1]$ par continuité et :

$$\underline{\forall x \in [0,1],\ f(x) = f(0) = \frac{\pi}{4}}$$

H-Intégration

34. Déterminer une primitive sur un ensemble à préciser de $f : t \mapsto \dfrac{12t^3 + 6t + 12}{(t^4 + t^2 + 4t + 6)^6}$.

Corrigé : Le discriminant de $t^2 + 4t + 6$ est strictement négatif, ainsi pour tout $t \in \mathbb{R}$, $t^2 + 4t + 6 > 0$ et par suite $t^4 + t^2 + 4t + 6 > 0$. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$\frac{12t^3 + 6t + 12}{(t^4 + t^2 + 4t + 6)^6} = 3\frac{4t^3 + 2t + 4}{(t^4 + t^2 + 4t + 6)^6}$$

On reconnaît la forme $\dfrac{u'}{u^6}$ avec $u : t \mapsto t^4 + t^2 + 4t + 6$ qui s'intègre en $-\dfrac{1}{5}\dfrac{1}{u^5}$.

$$\underline{F : t \mapsto -\frac{3}{5}\frac{1}{(t^4 + t^2 + 4t + 6)^5} \quad \text{définie sur } \mathbb{R}}$$

35. Déterminer une primitive sur un ensemble à préciser de $f : t \mapsto (4t + 2)(t^2 + t + 4)^{\frac{5}{2}}$.

Corrigé : Le discriminant du trinôme $t^2 + t + 4$ est strictement négatif, ainsi la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$(4t + 2)(t^2 + t + 4)^{\frac{5}{2}} = 2(2t + 1)(t^2 + t + 4)^{\frac{5}{2}}$$

On reconnaît la forme $u'u^{\frac{5}{2}}$ avec $u : t \mapsto t^2 + t + 4$ qui s'intègre en $\dfrac{2}{7}u^{\frac{7}{2}}$.

$$\underline{F : t \mapsto \frac{4}{7}(t^2 + t + 4)^{\frac{7}{2}} \quad \text{définie sur } \mathbb{R}}$$

36. Déterminer une primitive de $f : x \mapsto e^x \cos(x)$ à l'aide des nombres complexes.

Corrigé : La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$. On reconnait la partie réelle de $g : x \mapsto e^{(1+i)x}$. Une primitive de g sur $\mathbb{R}$ est :

$$G : x \mapsto \frac{1}{1+i}e^{(1+i)x}$$

Il s'agit alors de prendre la partie réelle de G pour avoir une primitive de f. Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$G(x) = \frac{1-i}{2}e^{(1+i)x} = \frac{1-i}{2}e^x(\cos(x) + i\sin(x))$$

La partie réelle de G est :

$$\underline{F : x \mapsto \frac{1}{2}e^x\Big(\cos(x) + \sin(x)\Big)}$$

37. Déterminer une primitive sur un ensemble à préciser de $f : t \mapsto \dfrac{1}{2 + \sin(t)^2}$.

Corrigé : La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$. Le cas 3 de la règle de Bioche s'applique puisque, on a $f(t+\pi) = f(t)$ car $\sin(t + \pi) = -\sin(t)$. On pose $u = \tan(t)$, à ce stade on doit restreindre l'ensemble d'étude, travaillons par exemple sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ ou plus généralement sur $I_k=\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi\right[$ où $k\in\mathbb{Z}$. On a $du=(1+\tan^2(t))dt=\frac{1}{\cos^2(t)}dt$. On va transformer l'écriture, on a :

$$\int\frac{dt}{2+\sin^2(t)}=\int\frac{dt}{\cos^2(t)}\times\frac{1}{\frac{2}{\cos^2(t)}+\tan^2(t)}=\int\frac{dt}{\cos^2(t)}\times\frac{1}{2(1+\tan^2(t))+\tan^2(t)}=\int\frac{du}{2+3u^2}=\frac{1}{3}\int\frac{du}{\frac{2}{3}+u^2}$$

Ceci en utilisant systématiquement que $1+\tan^2=\frac{1}{\cos^2}$.

On utilise le lemme vu en cours pour intégrer de telles fonctions, une primitive est $u\mapsto\frac{1}{3}\sqrt{\frac{3}{2}}\text{Arctan}\Big(\sqrt{\frac{3}{2}}u\Big)$.
Une primitive de f sur I_k est :

$$\underline{F:t\mapsto\frac{1}{\sqrt{6}}\text{Arctan}\Big(\sqrt{\frac{3}{2}}\tan(t)\Big)}$$

38. Déterminer une primitive de $f:t\mapsto\frac{1}{t^2+3t+4}$.

Corrigé : Le discriminant du trinôme au dénominateur est strictement négatif ainsi la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$. On a :

$$\frac{1}{t^2+3t+4}=\frac{1}{(t+\frac{3}{2})^2+\frac{7}{4}}=\frac{1}{(t+\frac{3}{2})^2+\Big(\sqrt{\frac{7}{4}}\Big)^2}$$

Une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est :

$$\underline{F:t\mapsto\frac{1}{\sqrt{\frac{7}{4}}}\text{Arctan}\Bigg(\frac{t+\frac{3}{2}}{\sqrt{\frac{7}{4}}}\Bigg)=\frac{2}{\sqrt{7}}\text{Arctan}\Big(\frac{2t+3}{\sqrt{7}}\Big)}$$

39. ★ Déterminer une primitive sur un ensemble à préciser de $f:t\mapsto\frac{\text{th}(t)}{\text{ch}(t)+1}$.

Corrigé : La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$. On pose $u=\text{ch}(t)$, on a $du=\text{sh}(t)dt$, ce changement de variable étant bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Pour tout $t\in\mathbb{R}$, on a :

$$\int\frac{\text{th}(t)}{\text{ch}(t)+1}dt=\int\frac{\text{sh}(t)}{\text{ch}(t)(\text{ch}(t)+1)}dt=\int\frac{du}{u(u+1)}=\int\frac{1+u-u}{u(u+1)}du=\int\Big(\frac{1}{u}-\frac{1}{u+1}\Big)du=\ln(\text{ch}(t))-\ln(\text{ch}(t)+1)$$

Une primitive de f est :

$$\underline{F:t\mapsto\ln(\text{ch}(t))-\ln(\text{ch}(t)+1)\quad\text{définie sur }\mathbb{R}}$$

I-Équations différentielles

40. Trouver toutes les fonctions de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ solutions de : $(E)\ :\ xy'(x)+y(x)=\text{Arctan}(x)$.

Corrigé : Comme $x\in\mathbb{R}_+^*$, l'équation se réécrit :

$$(E)\ :\ y'(x)+\frac{1}{x}y(x)=\frac{\text{Arctan}(x)}{x}$$

L'équation homogène associée est :

$$(EH)\ :\ y'(x)+\frac{1}{x}y(x)=0$$

La fonction $a:x\mapsto\dfrac{1}{x}$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et une primitive de a sur $\mathbb{R}_+^*$ est $A:x\mapsto\ln(x)$. Les solutions de l'équation homogène sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$y(x)=\lambda e^{-\ln(x)}=\frac{\lambda}{x}$$

avec $\lambda\in\mathbb{R}$.
Les solutions de l'équation homogène sont :

$$\mathcal{S}_H=\left\{\begin{array}{rccc} y & : & \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \dfrac{\lambda}{x}\end{array}\ ,\ \lambda\in\mathbb{R}\right\}$$

Pour trouver une solution particulière de (E), on applique la méthode de la variation de la constante en cherchant une solution particulière sous la forme $y_0:x\mapsto\dfrac{\lambda(x)}{x}$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ avec λ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. La fonction y_0 est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et :

$$\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ y_0'(x)=\frac{\lambda'(x)x-\lambda(x)}{x^2}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
y_0\text{ solution de }(E) &\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ y_0'(x)+\frac{1}{x}y_0(x)=\frac{\text{Arctan}(x)}{x}\\
&\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ \frac{\lambda'(x)x-\lambda(x)}{x^2}+\frac{\lambda(x)}{x^2}=\frac{\text{Arctan}(x)}{x}\\
&\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ \frac{\lambda'(x)}{x}=\frac{\text{Arctan}(x)}{x}\\
&\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ \lambda'(x)=\text{Arctan}(x)
\end{aligned}$$

Il reste à donner une primitive de la fonction Arctan, pour cela on utilise une intégration par parties en posant :

$$\begin{array}{rclcrcl} u'(x) & = & 1 & & u(x) & = & x\\ v(x) & = & \text{Arctan}(x) & & v'(x) & = & \dfrac{1}{x^2+1}\end{array}$$

Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$. On a :

$$\int\text{Arctan}(x)dx=x\text{Arctan}(x)-\int\frac{x}{x^2+1}dx=x\text{Arctan}(x)-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)$$

Ainsi on peut choisir $\lambda(x) = x\text{Arctan}(x) - \dfrac{1}{2}\ln(x^2+1)$ et par suite :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ y_0(x) = \text{Arctan}(x) - \frac{1}{2x}\ln(x^2+1)$$

Finalement l'ensemble des solutions de (E) :

$$\underline{\mathcal{S}_H = \left\{ \begin{array}{cccl} y & : & \mathbb{R}_+^* & \to \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto \dfrac{\lambda}{x} + \text{Arctan}(x) - \dfrac{1}{2x}\ln(x^2+1) \end{array},\ \lambda \in \mathbb{R} \right\}}$$

41. $\boxed{\text{Résoudre sur } \mathbb{R} : (E)\ :\ y'' + y = 2\cos^2(x).}$

Corrigé : • L'équation caractéristique s'écrit $R = X^2 + 1 = 0$, les solutions de cette équation sont i et $-i$, ainsi les solutions de l'équation homogène sont :

$$x \mapsto A\cos(x) + B\sin(x),\ (A, B) \in \mathbb{R}^2$$

• Pour trouver une solution particulière, il s'agit de remarquer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $2\cos^2(x) = \cos(2x) + 1$. On pose :

$$(E_1)\ :\ y'' + y = 1$$
$$(E_2)\ :\ y'' + y = \cos(2x)$$

On va trouver une solution particulière de (E_1) et une solution particulière de (E_2) puis les sommer en utilisant le principe de superposition pour avoir une solution particulière de (E).
La fonction constante égale à 1 est une solution particulière évidente de (E_1). Pour (E_2), on va trouver une solution particulière de $(E_2')\ :\ y''+y = e^{2ix}$ puis en prendre la partie réelle. On cherche une solution particulière de (E_2') sous la forme $y_0 : x \mapsto \gamma e^{2ix}$ avec $\gamma \in \mathbb{C}$ car $2i$ n'est pas racine de R. La fonction y_0 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$y_0' : x \mapsto 2i\gamma e^{2ix}$$
$$y_0'' : x \mapsto -4\gamma e^{2ix}$$

On a :

$$\begin{aligned} y_0 \text{ solution de } (E_2') &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ y_0''(x) + y_0(x) = e^{2ix} \\ &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ -4\gamma e^{2ix} + \gamma e^{2ix} = e^{2ix} \\ &\Leftrightarrow -3\gamma = 1 \\ &\Leftrightarrow \gamma = -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

Une solution particulière de (E_2') est $x \mapsto -\dfrac{1}{3}e^{2ix}$, sa partie réelle est $x \mapsto -\dfrac{1}{3}\cos(2x)$.
Finalement les solutions sur $\mathbb{R}$ de (E) sont les fonctions :

$$\underline{x \mapsto A\cos(x) + B\sin(x) + 1 - \frac{1}{3}\cos(2x)}$$

J-Nombres complexes

42. Trouver tous les $z \in \mathbb{C}$ tels que $z^2 - 2iz + 4 - 12i = 0$.

Corrigé : On applique la méthode habituelle vue en cours, en calculant le discriminant et en cherchant une racine carrée. On trouve :

$$\underline{\mathcal{S} = \{-2 - 2i,\ 2 + 4i\}}$$

43. Donner une écriture exponentielle de $z_1 = 2\sqrt{6}(1+i)$ et $z_2 = \sqrt{2}(1 + i\sqrt{3})$.

Corrigé : On a $|z_1| = \sqrt{(2\sqrt{6})^2 + (2\sqrt{6})^2} = 4\sqrt{3}$ ainsi :

$$z_1 = 4\sqrt{3}\Big(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\Big) = 4\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

On a $|z_2| = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{6})^2} = 2\sqrt{2}$. Ce qui permet d'avoir :

$$z_2 = 2\sqrt{2}\Big(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\Big) = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{3}}$$

En résumé :

$$\underline{z_1 = 4\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{4}} \text{ et } z_2 = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{3}}}$$

44. Calculer $\displaystyle\prod_{1 \le i < j \le 4} (x_j - x_i)$ avec $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = i$ et $x_4 = -i$.

Corrigé : Si l'on détaille ce produit, nous trouvons :

$$\prod_{1 \le i < j \le 4} (x_j - x_i) = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)(x_4 - x_1)(x_4 - x_2)(x_4 - x_3)$$

En développant tout cela, on trouve :

$$\underline{\prod_{1 \le i < j \le 4} (x_j - x_i) = -16i}$$

45. ★ Montrer qu'il est impossible de trouver $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\left(\frac{2+i}{2-i}\right)^n = 1$.

Corrigé : Notons $\omega = \dfrac{2+i}{2-i}$. Un calcul rapide montre que ω est de module 1, démontrons à présent que ce n'est pas une racine n-ième de l'unité. On procède par l'absurde en supposant qu'il existe un entier naturel non nul n tel que $\omega^n = 1$, c'est-à-dire $(2+i)^n = (2-i)^n$ $(\star)$.
Il est clair que n ne peut valoir 1, dans la suite on prend donc $n \ge 2$. On utilise la formule du binôme de la façon suivante :

$$(2+i)^n = ((2-i) + 2i)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (2-i)^{n-k}(2i)^k.$$

L'égalité $(\star)$ devient alors :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (2-i)^{n-k} (2i)^k = (2-i)^n$$

Il y a une simplification puisque le membre de droite est présent dans la somme du membre de gauche lorsque $k = 0$, d'où :

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (2-i)^{n-k} (2i)^k = 0$$

Puis on isole dans le membre de droite le terme de la somme correspondant à $k = n$:

$$\sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} (2-i)^{n-k} (2i)^k = -(2i)^n$$

On factorise le membre de gauche par $(2-i)$ et l'on nomme $a + ib$ le facteur restant :

$$(2-i) \underbrace{\sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} (2-i)^{n-k-1} (2i)^k}_{=a+ib} = -(2i)^n$$

Pour finir et aboutir à la contradiction souhaitée, on prend le module au carré de l'égalité précédente, ceci donne :

$$5(a^2 + b^2) = 2^{2n}$$

Cette dernière égalité ne peut avoir lieu puisque 5 ne divise pas 2^{2n}.
Finalement :

$$\underline{\frac{2+i}{2-i} \text{ n'est pas une racine de l'unité}}$$