1 ★★★

1. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $k \in [\![0, n]\!]$, établir l'égalité :

$$\binom{n+1}{k}^{-1} + \binom{n+1}{k+1}^{-1} = \frac{n+2}{n+1}\binom{n}{k}^{-1}$$

2. On pose $S_n = \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}^{-1}$. Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 2S_{n+1} = S_n + \frac{2}{n+2}$$

3. En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = \frac{1}{2^{n+1}}\sum_{i=1}^{n+1}\frac{2^i}{i}$$

Corrigé :

1. On a :

$$\begin{aligned}
\binom{n+1}{k}^{-1} + \binom{n+1}{k+1}^{-1} &= \frac{k!(n+1-k)!}{(n+1)!} + \frac{(k+1)!(n-k)!}{(n+1)!} \\
&= \frac{k!(n+1-k)! + (k+1)!(n-k)!}{(n+1)!} \\
&= \frac{k!(n-k)!(n+1-k+k+1)}{(n+1)n!} \\
&= \frac{n+2}{n+1}\frac{k!(n-k)!}{n!} \\
&= \frac{n+2}{n+1}\binom{n}{k}^{-1}
\end{aligned}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}
2S_{n+1} &= \frac{2}{n+2}\sum_{i=0}^{n+1}\binom{n+1}{i}^{-1} \\
&= \frac{1}{n+2}\Big(\sum_{i=0}^{n+1}\binom{n+1}{i}^{-1} + \sum_{i=0}^{n+1}\binom{n+1}{i}^{-1}\Big) \\
&= \frac{1}{n+2}\Big(1 + \sum_{i=0}^{n}\binom{n+1}{i}^{-1} + 1 + \sum_{i=1}^{n+1}\binom{n+1}{i}^{-1}\Big) \\
&= \frac{1}{n+2}\Big(1 + \sum_{i=0}^{n}\binom{n+1}{i}^{-1} + 1 + \sum_{j=0}^{n}\binom{n+1}{j-1}^{-1}\Big) \quad \text{en posant} j = i+1 \\
&= \frac{2}{n+2} + \frac{1}{n+2}\sum_{i=0}^{n}\Big(\binom{n+1}{i}^{-1} + \binom{n+1}{i-1}^{-1}\Big) \\
&= \frac{2}{n+2} + \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}^{-1} \quad \text{en utilisant la question 1.} \\
&= S_n + \frac{2}{n+2}
\end{aligned}$$

3. Démontrons la formule annoncée par récurrence :

- **Initialiation.** Pour $n = 0$, la formule devient $1 = 1$.
- **Hérédité.** On suppose la formule vraie au rang $n \in \mathbb{N}$, d'après la question précédente, on a :

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= \frac{1}{2}S_n + \frac{1}{n+2} \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{2^{n+1}}\sum_{i=1}^{n+1}\frac{2^i}{i} + \frac{1}{n+2} \\ &= \frac{1}{2^{n+2}}\sum_{i=1}^{n+2}\frac{2^i}{i} \end{aligned}$$

Ce qui démontre la formule au rang $n+1$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = \frac{1}{2^{n+1}}\sum_{i=1}^{n+1}\frac{2^i}{i}}$$

$\boxed{2}$ ★★ Soit $n \in \mathbb{N}$, calculer $S_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}k(k+1)\binom{n}{k}$.

Corrigé : Remarquons déjà que l'on peut faire commencer la somme à 1. Pour $n \geq 1$ et $k \in [\![1, n]\!]$, on a :

$$k(k+1)\binom{n}{k} = k(k+1)\frac{n!}{k!(n-k)!} = n(k+1)\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = n(k+1)\binom{n-1}{k-1}$$

On obtient :

$$S_n = n\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}(k+1)\binom{n-1}{k-1}$$

On tente d'appliquer à nouveau la technique précédente, pour $n \geq 2$, on a :

$$(k+1)\binom{n-1}{k-1} = (k-1)\binom{n-1}{k-1} + 2\binom{n-1}{k-1} = (n-1)\binom{n-2}{k-2} + 2\binom{n-1}{k-1}$$

On utilise ceci en coupant la somme en deux :

$$S_n = n\Big((n-1)\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n-2}{k-2} + 2\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n-1}{k-1}\Big)$$

Remarquons que la première somme commence en fait à $k = 2$ puisque le terme correspondant à $k = 1$ est nul. Dans la première somme, on effectue le changement d'indice $i = k-2$ et dans la seconde somme on effectue le changement d'indice $j = k-1$, cela donne :

$$S_n = n\Big((n-1)\sum_{i=0}^{n-2}(-1)^{n-2-i}\binom{n-2}{i} + 2\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^{n-1-j}\binom{n-1}{j}\Big)$$

On reconnait deux formules du binôme de Newton :

$$S_n = n(n-1)(1-1)^{n-2} + 2n(1-1)^{n-1}$$

Ce calcul étant valable pour $n \geq 2$. On calcul rapidement les premières valeurs : $S_0 = 0$, $S_1 = 2$, $S_2 = 2$ et pour tout $n \geq 3$, on a : $S_n = 0$ d'après l'expression trouvée précédemment.

$$\boxed{S_0 = 0,\ S_1 = 2,\ S_2 = 2 \text{ et pour tout } n \geq 3,\ S_n = 0}$$

3 ★★ On considère les polynômes : $P = X^2 - 2X + 1$, $P_0 = 1$, $P_1 = X + 1$ et $P_2 = (X+1)(X+2)$.
a) Trouver trois réels α, β et γ tels que $P = \alpha P_0 + \beta P_1 + \gamma P_2$.
b) En déduire la valeur de $S_n = \sum_{k=1}^{n} (k-1)^2 k!$ où $n \in \mathbb{N}$.

Correction partielle :

a) On trouve après calculs : $P = 4P_0 - 5P_1 + P_2$.
b) $S_n = \sum_{k=1}^{n} (k-1)^2 k! = \sum_{k=1}^{n} P(k) k!$ car $P = (X-1)^2$.
Donc $S_n = 4\sum_{k=1}^{n} P_0(k)k! - 5\sum_{k=1}^{n} P_1(k)k! + \sum_{k=1}^{n} P_2(k)k!$.
On utilise les expressions de P_0, P_1 et P_2 :

$$S_n = 4\sum_{k=1}^{n} k! - 5\sum_{k=1}^{n}(k+1)! + \sum_{k=1}^{n}(k+2)!$$

Dans le seconde somme, on pose $l = k+1$ et dans la troisième $m = k+2$. Ceci permet de mettre en évidence des simplifications ; après calculs, on trouve :

$$\boxed{S_n = (n+1)!(n-2) + 2}$$

4 ★ Soit $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $S_n = \sum_{1 \leq i,j \leq n} \max(i,j)$.

Corrigé : On distingue les cas où $i < j$, $i = j$ et $i > j$, ce qui permet de séparer la somme en trois :

$$S_n = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \max(i,j) + \sum_{1 \leq i = j \leq n} \max(i,j) + \sum_{1 \leq j < i \leq n} \max(i,j)$$

La première et la dernière somme sont égales quitte à échanger le nom des indices, on obtient :

$$\begin{aligned}
S_n &= 2\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j-1} j + \sum_{i=1}^{n} i \\
&= 2\sum_{j=1}^{n} j(j-1) + \frac{n(n+1)}{2} \\
&= 2\sum_{j=1}^{n} j^2 - 2\sum_{j=1}^{n} j + \frac{n(n+1)}{2} \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{3} - n(n+1) + \frac{n(n+1)}{2} \\
&= \frac{n(n+1)(4n-1)}{6}
\end{aligned}$$

5 Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n^3 \text{ impair} \Leftrightarrow n \text{ impair}$$

Corrigé : On procède par double implication.
• ($\Leftarrow$) On suppose que n est impair, démontrons que n^3 est impair. Si n est impair alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k+1$. On a :

$$n^3 = (2k+1)^3 = 8k^3 + 12k^2 + 6k + 1 = 2(4k^3 + 6k^2 + 3k) + 1$$

Ainsi n^3 est bien un nombre impair.

• ($\Rightarrow$) Pour la réciproque, on procède par contraposée en démontrant que n pair implique n^3 pair. Si n est pair, alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k$. On a $n^3 = (2k)^3 = 8k^3$ qui est bien un nombre pair.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ n^3 \text{ impair} \Leftrightarrow n \text{ impair}}$$

$\boxed{6}$ ★★ Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(y - f(x)) = 2 - x - y$$

Corrigé : • **Analyse** Soit f une fonction vérifiant la relation de l'énoncé, tentons de trouver des informations sur f. Appliquons la relation avec $x = 0$ et $y = f(0)$, cela donne :

$$f(f(0) - f(0)) = 2 - 0 - f(0) \Leftrightarrow f(0) = 2 - f(0) \Leftrightarrow f(0) = 1$$

Gardons en tête cette première information et appliquons la relation avec $x \in \mathbb{R}$ et $y = f(x)$. Cela donne :

$$f(f(x) - f(x)) = 2 - x - f(x) \Leftrightarrow f(0) = 2 - x - f(x) \Leftrightarrow f(x) = 1 - x \text{ (comme } f(0) = 1)$$

• **Synthèse.** Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto 1 - x$. Démontrons que f convient, c'est-à-dire qu'elle vérifie la relation de l'énoncé. Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$f(y - f(x)) = 1 - (y - f(x)) = 1 - y + f(x) = 1 - y + 1 - x = 2 - x - y$$

Ce qui est la relation attendue.

$$\boxed{\text{Seule la fonction définie sur } \mathbb{R} \text{ par } f : x \mapsto 1 - x \text{ convient}}$$

$\boxed{7}$ ★ Soit $n \in \mathbb{N}$, étudier la proposition suivante : $\mathcal{H}_n\ :\ n^2 \leq 2^n$.

Corrigé : Si l'on regarde les premiers termes, on constate que $\mathcal{H}_0$, $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ sont vraies, $\mathcal{H}_3$ est fausse, $\mathcal{H}_4$, $\mathcal{H}_5$ et $\mathcal{H}_6$ sont vraies. Ce qui nous laisse penser que l'on va pouvoir démontrer la propriété par récurrence pour $n \geq 4$.

• **Initialisation.** Pour $n = 4$, on a $n^2 = 16$ et $2^4 = 16$ ainsi $\mathcal{H}_4$ est vraie.

• **Hérédité.** On suppose que $n^2 \leq 2^n$ pour $n \geq 4$ fixé. On a :

$$(n + 1)^2 = n^2 + 2n + 1 \leq 2^n + 2n + 1$$

Si l'on parvient à démontrer que $2n + 1 \leq 2^n$, on aura : $(n + 1)^2 \leq 2^n + 2^n = 2^{n+1}$ ce qui terminera la récurrence.
On a $n^2 - 2n - 1 = (n - 1)^2 - 2 \geq 0$ car $n \geq 4$ donc $n^2 \geq 2n + 1$. Finalement :

$$(n + 1)^2 = n^2 + 2n + 1 \leq 2^n + 2n + 1 \leq 2^n + n^2 \leq 2^n + 2^n = 2^{n+1}$$

Ce qui démontre que $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie et termine la récurrence.

$$\boxed{\forall n \geq 4,\ n^2 \leq 2^n}$$

$\boxed{8}$ ★★ Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite de réels positifs tels que :

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ \forall n \geq 2,\ a_n^2 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} a_k \end{cases}$$

Démontrer que pour tout $n \geq 1$, on a : $a_n \geq \dfrac{n}{4}$.

Corrigé : Démontrons ce résultat par récurrence forte sur $n \in \mathbb{N}^*$ puisque l'expression de a_n met en jeu tous les termes précédents de la suite.

- **Initialisation.** On a $a_1 = 1 \geq \frac{1}{4}$, ce qui permet d'affirmer que $\mathcal{H}_1$ est vraie.
- **Hérédité.** Fixons $n \in \mathbb{N}^*$ et supposons que $\mathcal{H}_k$ est vraie pour $k \in [\![1, n]\!]$. On a :

$$a_{n+1}^2 = \sum_{k=1}^{n} a_k \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{4} = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{4}\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{8} \geq \frac{n+1}{2} \times \frac{n+1}{8}$$

Cette dernière inégalité vient du fait que $n \geq \frac{n+1}{2}$ ce qui est vrai car $n \geq 1$. On a démontré que $a_{n+1}^2 \geq \frac{(n+1)^2}{16}$ donc $a_{n+1} \geq \frac{n+1}{4}$, ce qui justifie que $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.

D'après le principe de récurrence forte, on peut en déduire que :

$$\boxed{\forall n \geq 1,\ a_n \geq \frac{n}{4}}$$

9 ★ Pour $a \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, calculer :

$$S = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k a^k$$

Corrigé : En revenant à la définition des coefficients binomiaux à l'aide de factorielles, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall k \in [\![1, n]\!],\ k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$$

Ce qui nous permet de faire le calcul suivant :

$$S = n\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} a^k = n\sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} a^{j+1} = na\sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} a^j = na(1+a)^{n-1}$$

ceci en effectuant le changement d'indice $j = k-1$.

Pour cet exercice, on aurait également pu poser la fonction $f : x \mapsto \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^k$ et faire un calcul de dérivée, comme nous l'on vu dans un exercice de la feuille de TD.

10 ★ Soient $(n, m) \in (\mathbb{N}^*)^2$, calculer $S = \sum_{p=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{m} \binom{n}{p} k^p$.

Corrigé : Nous pouvons intervertir les sommes pour obtenir :

$$S = \sum_{k=0}^{m} \sum_{p=0}^{n-1} \binom{n}{p} k^p$$

Dans la somme intérieure, on reconnait la formule du binôme de Newton à l'exception du terme correspondant à $p = n$ que l'on ajoute dans la somme et que l'on soustrait :

$$S = \sum_{k=0}^{m} \Big(\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} k^p - k^n \Big) = \sum_{k=0}^{m} \Big(\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} k^p 1^{n-p} - k^n \Big) = \sum_{k=0}^{m} \Big((k+1)^n - k^n \Big)$$

Enfin, on reconnait une somme télescopique et on obtient :

$$S = (m+1)^n - 0^n = (m+1)^n$$

$$\boxed{S = (m+1)^n}$$

11 ★ Soit $n \in \mathbb{N}$, calculer :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n-k)!(k+1)!}$$

Corrigé : On va faire apparaitre un coefficient du binôme.

$$\begin{aligned}
S &= \frac{1}{(n+1)!} \sum_{k=0}^{n} \frac{(n+1)!}{(n-k)!(k+1)!} \\
&= \frac{1}{(n+1)!} \sum_{k=0}^{n} \frac{(n+1)!}{(n+1-(k+1))!(k+1)!} \\
&= \frac{1}{(n+1)!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k+1} \\
&= \frac{1}{(n+1)!} \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n+1}{j} \quad (j = k+1) \\
&= \frac{1}{(n+1)!} \Big(\sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} - 1 \Big) \\
&= \frac{1}{(n+1)!} (2^{n+1} - 1)
\end{aligned}$$

12 ★ Soit $(x_k)_{1 \le k \le n} \in \mathbb{R}^n$ et $x_{n+1} = x_1$. Montrer que :

$$\sum_{k=1}^{n} x_k x_{k+1} \le \sum_{k=1}^{n} x_k^2$$

Corrigé : On sait que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on a :

$$2x_k x_{k+1} \le x_k^2 + x_{k+1}^2$$

en effet ceci s'obtient en développant le carré $(x_k - x_{k+1})^2 \ge 0$. Sachant cela :

$$2\sum_{k=1}^{n} x_k x_{k+1} \le \sum_{k=1}^{n} (x_k^2 + x_{k+1}^2) = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 + \sum_{j=2}^{n+1} x_j^2 = 2\sum_{k=1}^{n} x_k^2$$

ceci en utilisant l'hypothèse $x_{n+1} = x_1$. En divisant par 2, on a le résultat voulu.