1-Vrai ou faux : entre deux irrationnels distincts, il existe toujours un rationnel.

2-La suite définie pour $n \geq 0$ par $u_n = \dfrac{2}{5}n - \left\lfloor \dfrac{2}{5}n \right\rfloor$ est-elle dense dans $\mathbb{R}$? dans $[0,1]$?

3-Soit A une partie de $\mathbb{R}$. Démontrer que A est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe une suite d'éléments de A qui converge vers x.

1-Vrai ou faux : entre deux irrationnels distincts, il existe toujours un rationnel.

Réponse : C'est vrai car entre deux réels distincts, il existe toujours un rationnel (et un irrationnel est en particulier un réel).

2-La suite définie pour $n \geq 0$ par $u_n = \frac{2}{5}n - \left\lfloor \frac{2}{5}n \right\rfloor$ est-elle dense dans $\mathbb{R}$? dans $[0,1]$?

Réponse : D'après les encadrements classiques sur la partie entière, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0,1]$ ainsi (u_n) n'est pas dense dans $\mathbb{R}$.

On vérifie immédiatement que (u_n) est de période 5 en démontrant que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+5} = u_n$. Ainsi la suite ne prend que 5 valeurs :

$$u_0 = 0,\ u_1 = \frac{2}{5},\ u_2 = \frac{4}{5},\ u_3 = \frac{1}{5},\ u_4 = \frac{3}{5}$$

La suite n'est pas dense dans $[0,1]$ car l'intervalle $\left]\frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right[$ ne contient aucun terme de la suite.