1. Démontrer que $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

2. Soit E un ensemble non vide et A, B, C et D quatre parties de E.
Démontrer que :

$$\left\{\begin{array}{l} C \subset A \text{ et } D \subset B \\ C \cup D = E \\ A \cap B = C \cap D \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} A = C \\ B = D \end{array}\right.$$

3. Soient A, B et C trois parties d'un ensemble E. Démontrer que

$$A \cap \overline{B} = A \cap \overline{C} \Leftrightarrow A \cap B = A \cap C$$

1. Démontrer que $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

Réponse :

$$\begin{array}{rcl}(A \setminus B) \cup (B \setminus A) & = & (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}) \\ & = & (A \cup B) \cap (A \cup \overline{A}) \cap (\overline{B} \cup B) \cap (\overline{B} \cup \overline{A}) \\ & = & (A \cup B) \cap (\overline{B} \cup \overline{A}) \\ & = & (A \cup B) \cap \overline{A \cap B} \\ & = & (A \cup B) \setminus (A \cap B)\end{array}$$

2. Soit E un ensemble non vide et A, B, C et D quatre parties de E. Démontrer que :

$$\begin{cases} C \subset A \text{ et } D \subset B \\ C \cup D = E \\ A \cap B = C \cap D \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = C \\ B = D \end{cases}$$

Réponse : On suppose $C \subset A$, $D \subset B$, $C \cup D = E$ et $A \cap B = C \cap D$, démontrons que $A = C$ et $B = D$. Commençons par démontrer que $A = C$ par double inclusion.

• Soit $\underline{x \in A}$, si $x \in C$, on a bien $A \subset C$. Sinon $x \notin C$, on a alors $x \in D$ car $C \cup D = E$ donc tout élément de E est dans C ou dans D. Par hypothèse $D \subset B$ donc $x \in B$. Finalement $x \in A \cap B$, or $A \cap B = C \cap D$ donc $\underline{x \in C}$. On a démontré que $A \subset C$.

• L'inclusion $C \subset A$ est acquise puisque c'est l'une des hypothèses. Par double inclusion, on en déduit que $A = C$.

• L'égalité $B = D$ se démontre exactement de la même façon en remarquant que les hypothèses sont les mêmes si on échange les rôles de A et B puis C et D.

3. Soient A, B et C trois parties d'un ensemble E. Démontrer que

$$A \cap \overline{B} = A \cap \overline{C} \Leftrightarrow A \cap B = A \cap C$$

Réponse : Démontrons cela par double implication.

($\Rightarrow$) Démontrons par double inclusion que $A \cap B = A \cap C$.

- Soit $\underline{x \in A \cap B}$, montrons que $x \in A \cap C$. On sait que $x \in A$ et $x \in B$, il reste à démontrer que $x \in C$. Par l'absurde, si $x \notin C$ alors $x \in A \cap \overline{C}$. Or $A \cap \overline{C} = A \cap \overline{B}$ par hypothèse. On en déduit que $x \notin B$ ce qui est contradictoire. Finalement $x \in C$ et par suite $\underline{x \in A \cap C}$. Ce qui démontre : $(A \cap B) \subset (A \cap C)$.

• L'inclusion $(A \cap C) \subset (A \cap B)$ se démontre exactement de la même façon car B et C jouent un rôle symétrique.

$(\Leftarrow)$ Réciproquement, on suppose que $A \cap B = A \cap C$. On va se ramener au cas précédent en posant $B' = \overline{B}$ et $C' = \overline{C}$. On a ainsi $A \cap \overline{B'} = A \cap \overline{C'}$ et d'après l'implication précédemment démontrée, on en déduit que $A \cap B' = A \cap C'$, c'est-à-dire $A \cap \overline{B} = A \cap \overline{C}$. Ce constitue l'égalité voulue.

On conclut :

$$A \cap \overline{B} = A \cap \overline{C} \Leftrightarrow A \cap B = A \cap C$$