

1-Quel est le minimum sur $\mathbb{R}_+^*$ de la fonction $f : x \mapsto x^x$?

2-Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction $f_\alpha : x \mapsto x^\alpha$ réalise t-elle une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$? Donner alors l'expression de f_α^{-1} .

3-Trouver tous les réels x tels que $\tan(x) = \sqrt{3}$.

4-Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I avec u strictement positive. Calculer la dérivée de $f : x \mapsto u(x)^{v(x)}$.

1-Quel est le minimum sur $\mathbb{R}_+^*$ de la fonction $f : x \mapsto x^x$?

Réponse : Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a : $f(x) = e^{x \ln(x)}$. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme composée de fonctions dérivables.

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f'(x) = \left(1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x}\right) e^{x \ln(x)} = (\ln(x) + 1) e^{x \ln(x)}$$

On a :

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \ln(x) + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq e^{-1}$$

La fonction f est décroissante sur $]0, e^{-1}]$ et croissante sur $[e^{-1}, +\infty[$. Son minimum vaut donc :

$$f(e^{-1}) = e^{e^{-1} \ln(e^{-1})} = e^{-e^{-1}}$$

2-Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction $f_\alpha : x \mapsto x^\alpha$ réalise t-elle une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$? Donner alors l'expression de f_α^{-1} .

Réponse : D'après le cours et en utilisant le théorème de la bijection, on sait que pour $\alpha \neq 0$, la fonction f_α est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$ (strictement croissante si $\alpha > 0$ et strictement décroissante si $\alpha < 0$.) Dans ce cas, la fonction $f_{\frac{1}{\alpha}}$ est sa bijection réciproque car pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$f_{\frac{1}{\alpha}}(f_\alpha(x)) = (x^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = x$$

$$f_\alpha(f_{\frac{1}{\alpha}}(x)) = (x^{\frac{1}{\alpha}})^\alpha = x$$

3-Trouver tous les réels x tels que $\tan(x) = \sqrt{3}$.

Réponse : Cette équation est définie pour $x \neq \frac{\pi}{2} [\pi]$. On sait que $\tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$. Ainsi :

$$\tan(x) = \tan\left(\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} [\pi]$$

L'ensemble des solutions est : $\mathcal{S} = \left\{ \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

4-Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I avec u strictement positive. Calculer la dérivée de $f : x \mapsto u(x)^{v(x)}$.

Réponse : Par définition, on a pour tout $x \in I : f(x) = e^{v(x) \ln(u(x))}$. Par composition de fonctions dérivables, f est dérivable et pour tout $x \in I$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(v'(x) \ln(u(x)) + v(x) \frac{u'(x)}{u(x)} \right) e^{v(x) \ln(u(x))} \\ &= v'(x) \ln(u(x)) u(x)^{v(x)} + v(x) u'(x) u(x)^{v(x)-1} \end{aligned}$$