1) ★★★ Soit (z_n) une suite à valeurs complexes. On suppose que :

$$\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2,\ p \neq q \Rightarrow |z_p - z_q| \geq 1$$

Démontrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} |z_n| = +\infty$.

Réponse : On raisonne par l'absurde en supposant que $(|z_n|)$ ne tend pas vers $+\infty$. Ce signifie que :

$$\exists A \in \mathbb{R},\ \forall N \in \mathbb{N},\ \exists n \geq N,\ |z_n| \leq A$$

Cela signifie qu'il existe une infinité de termes de la suite qui sont bornés en module par A, on peut les placer dans une suite extraite. C'est-à-dire qu'il existe une extractrice φ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |z_{\varphi(n)}| \leq A$$

La suite $(z_{\varphi(n)})$ est bornée donc elle admet une suite extraite convergente, il existe une extractrice ψ telle que $(z_{\varphi(\psi(n))})$ converge vers l. Il reste à appliquer l'hypothèse pour obtenir une contradiction. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\varphi(\psi(n)) \neq \varphi(\psi(n+1))$ par stricte croissance des extractrices, ainsi :

$$\left|z_{\varphi(\psi(n))} - z_{\varphi(\psi(n+1))}\right| \geq 1$$

En passant à la limite, on obtient $|l - l| \geq 1$ ce qui est absurde.

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} |z_n| = +\infty}$$

2) ★ Soit $a \in]0,1[$. On définit la suite (u_n) par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ u_n = \prod_{k=1}^{n} (1+a^k)$$

1. Étudier le sens de variation de la suite (u_n).
2. Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \ 1+x \leq e^x$.
3. En déduire que la suite (u_n) converge.

Réponse : 1) La suite (u_n) est à termes strictement positifs, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\prod_{k=1}^{n+1} (1+a^k)}{\prod_{k=1}^{n} (1+a^k)} = (1+a^{n+1}) > 0$$

La suite (u_n) est strictement croissante.

3) Pour démontrer que cette suite croissante converge, il reste à démontrer qu'elle est majorée. Pour cela, on utilise l'inégalité de la question précédente, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$u_n = \prod_{k=1}^{n}(1+a^k) \leq \prod_{k=1}^{n} e^{a^k} = e^{\sum_{k=1}^{n} a^k} = e^{a\frac{1-a^n}{1-a}} \leq e^{\frac{a}{1-a}}$$

car $a^n \in]0,1[$ donc $1-a^n \in]0,1[$. La suite (u_n) est croissante et majorée donc elle converge.

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ converge}}$$

3) Soit (u_n) la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2 + k^3}$$

Étudier la convergence de (u_n).

Réponse :

On procède par encadrement :

$$\forall k \in [\![1, n]\!],\ \frac{1}{n^2 + n^3} \leq \frac{1}{n^2 + k^3} \leq \frac{1}{n^2 + 1^3}$$

On somme :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2 + n^3} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2 + k^3} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2 + 1}$$

Les sommes qui encadrent (u_n) se calculent :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \frac{n}{n^2+n^3} \leq u_n \leq \frac{n}{n^2+1}$$

D'après le théorème d'encadrement, on en déduit que :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = 0}$$

4) ★ Soit (u_n) une suite réelle telle que :
$\forall (n,m) \in (\mathbb{N}^*)^2,\ 0 \leq u_{m+n} \leq \dfrac{m+n}{mn}$. Démontrer que (u_n) converge.

Réponse : Prenons $n = m$, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leq u_{2n} \leq \frac{2n}{n^2} = \frac{2}{n}$$

D'après le théorème d'encadrement (u_{2n}) tend vers 0.

De même, en prenant $m = n+1$, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leq u_{2n+1} \leq \frac{2n+1}{(n+1)n}$$

D'après le théorème d'encadrement (u_{2n+1}) tend vers 0.

D'après le théorème de recollement, on en déduit que :

$$\boxed{(u_n) \text{ tend vers } 0}$$

5) ★★ Soit $\theta \in]0,\pi[$, étudier la limite de la suite :

$$a_n = \left(n! \prod_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{\theta}{k}\right)\right)^{\frac{1}{n}}$$

Réponse : Soit $\theta \in]0,\pi[$, pour $k \in [\![1,n]\!]$, on a $\dfrac{\theta}{k} \in]0,\pi[$ ainsi $\sin\left(\dfrac{\theta}{k}\right) > 0$ et la suite (a_n) est strictement positive Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\ln(a_n) = \ln\left(\prod_{k=1}^{n} k\sin\left(\frac{\theta}{k}\right)\right)^{\frac{1}{n}}\Bigg) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(k\sin\left(\frac{\theta}{k}\right)\right)$$

Cela fait penser au théorème de Cesàro, on pose donc $u_n = \ln\left(n\sin\left(\frac{\theta}{n}\right)\right)$ pour $n \geq 1$. On a :

$$n\sin\left(\frac{\theta}{n}\right) = \theta\frac{\sin\left(\frac{\theta}{n}\right)}{\frac{\theta}{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \theta$$

La suite (u_n) tend vers $\ln(\theta)$ par continuité de la fonction ln. D'après le théorème de Cesàro, la suite $(\ln(a_n))$ tend vers $\ln(\theta)$.

$$\boxed{(a_n) \text{ tend vers } \theta}$$

6) ★ Soit (a_n) une suite décroissante qui tend vers 0. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k$. Démontrer que (u_n) converge.

Réponse : La stratégie va être de démontrer que (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont adjacentes.

• La suite (u_{2n}) est décroissante car :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{2n+2} - u_{2n} = \sum_{k=0}^{2n+2} (-1)^k a_k - \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k a_k = a_{2n+2} - a_{2n+1} \leq 0$$

• La suite (u_{2n+1}) est croissante car :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{2n+3} - u_{2n+1} = \sum_{k=0}^{2n+3} (-1)^k a_k - \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k a_k = -a_{2n+3} + a_{2n+2} \geq 0$$

- Enfin :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{2n+1} - u_{2n} = \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k a_k - \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k a_k = -a_{2n+1} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

D'après le théorème des suites adjacentes, les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers la même limite. D'après le théorème de recollement (u_n) converge.

$\boxed{(u_n) \text{ converge}}$