1 ★ Pour $n \in \mathbb{N}^*$ calculer la dérivée n-ième des fonctions suivantes :

1. $f : t \mapsto \cos(t)^3$
2. $g : t \mapsto t^{n-1}\ln(t)$
3. $h : t \mapsto \dfrac{1}{1-t^2}$

Corrigé :

1. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ et est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. On commence par linéariser $\cos(t)^3$ avec la méthode vue dans le chapitre 1. On obtient :
$$\forall t \in \mathbb{R},\ \cos(t)^3 = \frac{1}{4}\cos(3t) + \frac{3}{4}\cos(t)$$
Soit $n \in \mathbb{N}$, on dérive n fois pour obtenir :
$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R},\ f^{(n)}(t) = \frac{3^n}{4}\cos\Big(3t + n\frac{\pi}{2}\Big) + \frac{3}{4}\cos\Big(t + n\frac{\pi}{2}\Big)}$$

2. La fonction g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$. On applique la formule de Leibniz avec $u : t \mapsto t^{n-1}$ et $v : t \mapsto \ln(t)$ qui sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Pour $t \in \mathbb{R}_+^*$, on a :
$$\begin{aligned}
g^{(n)}(t) &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u^{(k)}(t)v^{(n-k)}(t)\\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}\frac{(n-1)!}{(n-1-k)!}t^{n-1-k}\frac{(-1)^{n-k-1}(n-k-1)!}{t^{n-k}} + 0\times\ln(t)\\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}(-1)^{n-k-1}\frac{(n-1)!}{t}\\
&= \frac{(n-1)!}{t}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k-1} - (-1)^{-1}\\
&= \frac{(n-1)!}{t}\Big(-\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k} + 1\Big)\\
&= \frac{(n-1)!}{t}((1-1)^n + 1)\\
&= \frac{(n-1)!}{t}
\end{aligned}$$
$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ g^{(n)}(t) = \frac{(n-1)!}{t}}$$
Les dérivées successives de u et v se calculent en intuitant une formule que l'on démontre par récurrence.

On ne pouvait pas raisonner simplement par récurrence car la fonction que l'on dérive change entre les rangs n et $n+1$.

3. Pour $t \in \mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$, on a :
$$\frac{1}{1-t^2} = \frac{1}{2}\frac{1}{1-t} + \frac{1}{2}\frac{1}{1+t}$$
Ainsi :
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in \mathbb{R}\setminus\{-1,1\},\ h^{(n)}(t) = \frac{1}{2}\frac{n!}{(1-t)^{n+1}} + \frac{1}{2}\frac{(-1)^n n!}{(1+t)^{n+1}}}$$

2 ★★ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable en 0. On suppose qu'il existe $\alpha \in]0,1[$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(\alpha x) = \alpha f(x)$$

Démontrer que f est linéaire.

Corrigé : Soit $x \in \mathbb{R}^*$ et $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\frac{f(\alpha^{n+1}x)}{\alpha^{n+1}x} = \frac{\alpha f(\alpha^n x)}{\alpha^{n+1}x} = \frac{f(\alpha^n x)}{\alpha^n x}$$

Ainsi la suite $\left(\dfrac{f(\alpha^n x)}{\alpha^n x}\right)$ est constante, elle converge vers son premier terme qui est $\dfrac{f(x)}{x}$.

D'autre part, on remarque que $f(0) = f(\alpha \times 0) = \alpha f(0)$ ainsi $f(0) = 0$ puisque $\alpha \neq 1$. On a :

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} f'(0)$$

Ainsi par composition des limites, puisque $\lim\limits_{n \to +\infty} \alpha^n x = 0$, on obtient :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{f(\alpha^n x)}{\alpha^n x} = f'(0)$$

Par unicité de la limite, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a :

$$\frac{f(x)}{x} = f'(0) \Leftrightarrow f(x) = f'(0)x$$

Cette égalité demeure pour $x = 0$, on en déduit que f est linéaire.

$$\boxed{f \text{ est linéaire}}$$

3 ★★ Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $0 < a < b$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $f(a) = f(b) = 0$. Montrer qu'il existe un point de la courbe représentative de f où la tangente passe par l'origine.

Corrigé : Analysons le problème. On cherche $c \in [a,b]$ tel que la tangente à la courbe représentative de f passe par l'origine. Cette équation a pour tangente $y = f'(c)(x-c) + f(c)$. Elle passe par l'origine si et seulement si $-cf'(c) + f(c) = 0$. Cela fait penser à la dérivée d'un quotient car si on pose $g : x \mapsto \dfrac{f(x)}{x}$ qui est définie sur $[a,b]$, on a : $g'(c) = \dfrac{cf'(c) - f(c)}{c^2}$. On est ramené à démontrer que g' s'annule, pour cela on va appliquer le théorème de Rolle.

- g est continue sur $[a,b]$ car f l'est.
- g est dérivable sur $]a,b[$ car f l'est.
- $g(a) = g(b) = 0$ car $f(a) = f(b) = 0$

D'après le théorème de Rolle, il existe $c \in]a,b[$ tel que $g'(c) = 0$, c'est-à-dire $cf'(c) - f(c) = 0$ ce qui est le résultat voulu d'après l'analyse que nous avons faite.

4 ★ Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ telle que :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ (f \circ f)(x) = \frac{x}{2}$$

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R},\ f\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{f(x)}{2}$.
2. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R},\ f'(x) = f'\left(\frac{x}{2}\right)$.
3. En déduire l'ensemble des fonctions f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ vérifiant la condition de l'énoncé.

Corrigé :

1. Soit $x \in \mathbb{R}$ par associativité de la composition, on a :
$$f\left(\frac{x}{2}\right) = f((f \circ f)(x)) = (f \circ f)(f(x)) = \frac{f(x)}{2}$$
2. On dérive la relation précédente, f étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ pour obtenir :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \frac{1}{2}f'\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{f'(x)}{2}$$
On en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R},\ f'(x) = f'\left(\frac{x}{2}\right)$.
3. Par une récurrence immédiate, on en déduit que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = f'\left(\frac{x}{2^n}\right)$$
Il est possible de passer à la limite quand n tend vers $+\infty$ dans la relation précédente car f' est continue sur $\mathbb{R}$. On obtient :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = f'(0)$$
Étant donné que f' est constante, on en déduit que f est affine.

Il s'agit à présent de faire la synthèse. Soit $f : x \mapsto ax + b$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Soit $x \in \mathbb{R}$, on a :
$$f \circ f(x) = a(ax + b) + b = a^2x + ab + b$$
Ainsi la relation est vraie si et seulement si $a^2x + ab + b = \frac{x}{2}$. Cette égalité est vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$ si et seulement si :
$$\begin{cases} a^2 = \frac{1}{2} \\ ab + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \\ b = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\text{Les seules fonctions qui conviennent sont les fonctions } x \mapsto \pm\frac{x}{\sqrt{2}} \text{ qui sont bien de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}}$$

5 Déterminer $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ afin que la fonction suivante soit dérivable sur $\mathbb{R}$.
$$\begin{array}{rccl} f & : & \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto \begin{cases} 4x & \text{si } x \leq 0 \\ ax^2 + bx + c & \text{si } 0 < x < 1 \\ 3 - 2x & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \end{array}$$

Corrigé : **Analyse.** On suppose que f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Tout d'abord f doit être continue sur $\mathbb{R}$, on doit avoir $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$, ce qui impose $c = 0$ et $a + b = 1$.

D'autre part, on forme le taux d'accroissement de f en 0, pour $x < 0$:

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 4 \underset{x \to 0^-}{\longrightarrow} 4$$

et pour $x > 0$:

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = ax + b \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} b$$

Comme f est dérivable en 0, on a : $b = 4$. De même, en examinant la dérivabilité en 1, on a $a = -3$.

Synthèse. Pour $a = -3$, $b = 4$ et $c = 0$, on vérifie que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$\boxed{6}$ ★★★ Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et dérivable sur $[0,1]$ telle que $f(0) = 0$ et pour tout $x \in]0,1[$, $f(x) > 0$. Montrer que :

$$\exists c \in]0,1[, \ \frac{2f'(c)}{f(c)} = \frac{f'(1-c)}{f(1-c)}$$

Corrigé : On considère la fonction $g : x \mapsto f(x)^2 f(1-x)$ continue et dérivable sur $[0,1]$ car f l'est. On a $g(0) = g(1) = 0$ car $f(0) = 0$. D'après le théorème de Rolle, il existe $c \in]0,1[$ tel que $g'(c) = 0$. On a :

$$g'(c) = 2f'(c)f(c)f(1-c) - f(c)^2 f'(1-c) = 0 \Leftrightarrow \frac{2f'(c)}{f(c)} = \frac{f'(1-c)}{f(1-c)}$$

en remarquant que $f(c) > 0$ et $f(1-c) > 0$ par hypothèse.

$\boxed{7}$ ★★★ Soit $f :]0,1] \to \mathbb{R}$ dérivable. On suppose que $\lim_{x \to 0} f(x) = l$ et $\lim_{x \to 0} xf'(x) = l'$ avec $(l, l') \in \mathbb{R}^2$. Démontrer que $l' = 0$.

Corrigé : Supposons par l'absurde que $l' > 0$, le cas $l' < 0$ étant identique. Par définition de la limite, il existe $\varepsilon > 0$ et il existe un voisinage de 0 de la forme $]0, \alpha]$ avec $\alpha > 0$ sur lequel $xf'(x) \geq \varepsilon$. Prenons $x > 0$ tel que $[x, 2x] \subset]0, \alpha]$, on va appliquer le théorème des accroissements finis à la fonction f sur $[x, 2x]$. Les hypothèses sont vérifiées puisque f est dérivable sur $]0,1]$, il existe $c_x \in]x, 2x[$ tel que :

$$f'(c_x) = \frac{f(2x) - f(x)}{2x - x} = \frac{f(2x) - f(x)}{x}$$

Or $c_x f'(c_x) \geq \varepsilon$, on en déduit que :

$$f(2x) - f(x) \geq x \frac{\varepsilon}{c_x} \geq \frac{\varepsilon}{2}$$

En passant à la limite quand x tend vers 0, on obtient : $0 = l - l \geq \frac{\varepsilon}{2}$, ce qui est absurde. On en déduit que $l' = 0$.

$$\boxed{l' = 0}$$

$\boxed{8}$ ★★★ Soit $n \geq 2$ et $(f_i)_{1 \leq i \leq n}$ des fonctions continues et dérivables sur $[a,b]$. On suppose que $f_1(a) = f_n(b) = 0$ et que pour tout $x \in]a,b[$, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $f_i(x) \neq 0$. Démontrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que :

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{f_i'(c)}{f_i(c)} = 0$$

Corrigé : On pose $f : x \mapsto \prod_{i=1}^{n} f_i(x)$ définie sur $[a,b]$. La fonction f est continue et dérivable sur $[a,b]$, de plus

$f(a) = f(b) = 0$ car $f_1(a) = f_n(b) = 0$. D'après le théorème de Rolle, il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$. Or :

$$f'(c) = \sum_{i=1}^{n} f_i'(c) \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} f_j(c) = f(c) \sum_{i=1}^{n} \frac{f_i'(c)}{f_i(c)}$$

Comme $f_i(c) \neq 0$ par hypothèse puisque $c \in]a,b[$, on en déduit que : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{f_i'(c)}{f_i(c)} = 0$.

$\boxed{9}$ ★★ Soit $f : x \mapsto \sqrt{x\text{Arcsin}(x)}$.

1. Donner l'ensemble de définition de f.
2. Étudier la dérivabilité de f.

Corrigé :

1. La fonction Arcsin est définie sur $[-1,1]$. De plus, d'après nos connaissances sur la fonction Arcsin, on sait que $\text{Arcsin}(x)$ est du signe de x. Ainsi pour tout $x \in [-1,1]$, $x\text{Arcsin}(x) \geq 0$. La fonction f est définie sur $[-1,1]$.
2. La fonction $\sqrt{}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et Arcsin est dérivable sur $]-1,1[$, par composition f est dérivable sur $]-1,1[\setminus\{0\}$.

   • **Étude en 0.** Pour $x \in [-1,1] \setminus \{0\}$, on forme le taux de variation de f en 0 :

   $$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{\sqrt{x\text{Arcsin}(x)}}{x} = \frac{\sqrt{x^2}\sqrt{\frac{\text{Arcsin}(x)}{x}}}{x} = \frac{|x|}{x}\sqrt{\frac{\text{Arcsin}(x)}{x}}$$

   Or

   $$\lim_{x\to 0} \frac{\text{Arcsin}(x)}{x} = \text{Arcsin}'(0) = \frac{1}{\sqrt{1-0^2}} = 1$$

   On en déduit que $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 1$ et $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = -1$.
   La fonction f n'est pas dérivable en 0.

   • **Étude en 1.** Ici, nous allons appliquer le théorème de la limite de la dérivée. La fonction f est continue sur $[0,1]$ et dérivable sur $]0,1[$, pour $x \in]0,1[$, on a :

   $$f'(x) = \left(\text{Arcsin}(x) + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)\frac{1}{2\sqrt{x\text{Arcsin}(x)}}$$

   Ce n'est pas une forme indéterminée et nous obtenons $\displaystyle\lim_{x\to 1} f'(x) = +\infty$. D'après le théorème de la limite de la dérivée, on en déduit que f n'est pas dérivable en 1.

   • L'étude en -1 est identique car la fonction est paire.

$\boxed{10}$ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Montrer que si f' ne s'annule pas alors f n'est pas périodique.

Corrigé : On démontre la contraposée en utilisant le théorème de de Rolle. On suppose que f est T-périodique avec $T > 0$. En particulier, on a $f(T) = f(0)$, la fonction f étant continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, on en déduit que f' s'annule sur $]0,T[$.

$\boxed{11}$ ★ Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $n \geq 2$. Montrer que le polynôme $P = X^n + aX + b$ admet au plus 3 racines réelles.

Corrigé : On note $f : x \mapsto x^n+ax+b$ la fonction polynomiale associée à P. Par l'absurde, on se donne $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$ quatre réels qui sont racines de P. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, nous pouvons appliquer le corollaire du théorème de Rolle à f et à ses dérivées.

On a $f(a_1) = f(a_2)$, $f(a_2) = f(a_3)$ et $f(a_3) = f(a_4)$, on en déduit qu'il existe $(b_1,b_2,b_3) \in]a_1,a_2[\times]a_2,a_3[\times]a_3,a_4[$ tels que $f'(b_1) = f'(b_2) = f'(b_3) = 0$.

De même, il existe $(c_1, c_2) \in]b_1, b_2[\times]b_2, b_3[$ tels que $f''(c_1) = f''(c_2) = 0$.
Or $f'' : x \mapsto n(n-1)x^{n-2}$ ne s'annule pas si $n = 2$ et s'annule uniquement en 0 si $n \geq 3$, d'où l'absurdité.

$$\boxed{f \text{ admet au plus 3 racines réelles}}$$

12 ★★ Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $f(0) = 1$ et $f(1) = e$. Démontrer qu'il existe $c \in]0,1[$ tel que $f(c) = f'(c)$.

Corrigé : On pose $g : x \mapsto f(x)e^{-x}$ qui est continue et dérivable sur $[0,1]$ car f est continue et dérivable sur $[0,1]$. On a $g(0) = f(0) = 1$ et $g(1) = f(1)e^{-1} = 1$. D'après le théorème de Rolle, la fonction g' s'annule, c'est-à-dire qu'il existe $c \in]0,1[$ tel que $g'(c) = 0$. Or :

$$g' : x \mapsto f'(x)e^{-x} - f(x)e^{-x} = (f'(x) - f(x))e^{-x}$$

On en déduit que $g'(c) = 0$ implique que $f(c) = f'(c)$ comme demandé.

13 ★★ Déterminer, si elle existe, la limite suivante :

$$\lim_{x\to+\infty} x^3\left(\text{sh}\left(\frac{1}{x^2}\right) - \text{sh}\left(\frac{1}{(x+1)^2}\right)\right)$$

Corrigé : On pose $f : t \mapsto \text{sh}\left(\frac{1}{t^2}\right)$ définie sur $\mathbb{R}^*$ et on se donne $x > 0$. On va appliquer le théorème des accroissements finis à la fonction f sur l'intervalle $[x, x+1]$. La fonction f est continue et dérivable sur $[x, x+1]$ car sh est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. On en déduit l'existence de $c_x \in]x, x+1[$ tel que :

$$f'(c_x) = \frac{f(x+1) - f(x)}{x+1-x} = f(x+1) - f(x)$$

Or $f' : t \mapsto -\frac{2}{t^3}\text{ch}\left(\frac{1}{t^2}\right)$, ainsi la relation devient :

$$\frac{2}{c_x^3}\text{ch}\left(\frac{1}{c_x^2}\right) = \text{sh}\left(\frac{1}{x^2}\right) - \text{sh}\left(\frac{1}{(x+1)^2}\right)$$

On multiplie par x^3 pour obtenir :

$$\frac{2x^3}{c_x^3}\text{ch}\left(\frac{1}{c_x^2}\right) = x^3\left(\text{sh}\left(\frac{1}{x^2}\right) - \text{sh}\left(\frac{1}{(x+1)^2}\right)\right)$$

Il reste à passer à la limite quand x tend vers $+\infty$. On a $c_x \in]x, x+1[$ donc :

$$\frac{2x^3}{(x+1)^3} \leq \frac{2x^3}{c_x^3} \leq \frac{2x^3}{x^3}$$

D'après le théorème d'encadrement, on obtient $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x^3}{c_x^3} = 2$. D'autre part $\lim\limits_{x\to+\infty} c_x = +\infty$ car $c_x \geq x$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \text{ch}\left(\frac{1}{c_x^2}\right) = \lim\limits_{y\to0} \text{ch}(y) = 1$.

Finalement :

$$\lim_{x\to+\infty} x^3\left(\text{sh}\left(\frac{1}{x^2}\right) - \text{sh}\left(\frac{1}{(x+1)^2}\right)\right) = 2$$

14 ★ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Démontrer que f est lipschitzienne.

Corrigé : Déjà la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$. D'après le cours, cela revient à démontrer que f' est bornée sur $\mathbb{R}$. On a $f' : x \mapsto \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$.

Or pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $(x-1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow -1 \leq \dfrac{-2x}{1+x^2}$ et par suite $-1 \leq \dfrac{-2x}{(1+x^2)^2}$ puisque $1+x^2 \geq 1$.

De même, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(x+1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow 1 \geq \dfrac{-2x}{1+x^2}$ donc $1 \geq \dfrac{-2x}{(1+x^2)^2}$.

Finalement $|f'| \leq 1$ et par suite f est 1-lipschitzienne.