1. (a) On sait que 1, j et j^2 sont les trois racines cubiques de l'unité. Or dès que $n \geq 2$, la somme des racines n-ièmes de l'unité vaut 0.

$$\boxed{1 + j + j^2 = 0}$$

On a :

$$j = e^{\frac{2i\pi}{3}} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\boxed{j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

(b) L'existence d'une telle écriture est donnée par la définition de $\mathbb{Z}[j]$, il reste à démontrer l'unicité. On suppose que :

$$z = a + bj = c + dj \text{ avec } (a, b, c, d) \in \mathbb{Z}^4$$

En utilisant l'écriture algébrique de j donnée dans la question précédente, il vient :

$$a - \frac{1}{2}b + \frac{\sqrt{3}}{2}ib = c - \frac{1}{2}d + \frac{\sqrt{3}}{2}id$$

On identifie les parties imaginaires pour obtenir : $b = d$ puis on identifie les parties réelles pour avoir $a = c$. Ce qui démontre l'unicité de l'écriture.

$$\boxed{\text{L'écriture d'un élément de } \mathbb{Z}[j] \text{ est unique}}$$

2. Nous allons démontrer que $(\mathbb{Z}[j], +, \times)$ est un anneau en démontrant plutôt que c'est un sous-anneau de $(\mathbb{C}, +, \times)$. Vérifions les différentes conditions requises.

• Déjà $\mathbb{Z}[j] \subset \mathbb{C}$.

• $0 \in \mathbb{Z}[j]$ car $0 = 0 + 0i$.

• Soient $z = a + bj$ et $z' = c + dj$ avec $(a, b, c, d) \in \mathbb{Z}^4$. On a :

$$z + z' = a + bj + c + dj = \underbrace{(a + c)}_{\in\mathbb{Z}} + \underbrace{(b + d)}_{\in\mathbb{Z}}j$$

donc $z + z' \in \mathbb{Z}[j]$.

• Soit $z = a + bj$ avec $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$, on a :

$$-z = -(a + bj) = \underbrace{-a}_{\in\mathbb{Z}} + \underbrace{(-b)}_{\in\mathbb{Z}}j$$

donc $-z \in \mathbb{Z}[j]$.

• $1 = 1 + 0j \in \mathbb{Z}[j]$.

• Soient $z = a + bj$ et $z' = c + dj$ avec $(a, b, c, d) \in \mathbb{Z}^4$. En utilisant la relation $1 + j + j^2 = 0$, c'est-à-dire $j^2 = -j - 1$, on a :

$$z \times z' = (a + bj) \times (c + dj) = ac + (ad + bc)j + bdj^2 = ac + (ad + bc)j + bd(-1 - j) = \underbrace{ac - bd}_{\in\mathbb{Z}} + \underbrace{(ad + bc - bd)}_{\in\mathbb{Z}}j$$

donc $z \times z' \in \mathbb{Z}[j]$.

Enfin la mutiplication des nombres complexes est évidemment commutative, on en déduit que :

$$\boxed{(\mathbb{Z}[j], +, \times) \text{ est un anneau commutatif en tant que sous-anneau de } (\mathbb{C}, +, \times)}$$

3. (a) Soit $z = a + bj$ avec $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$. On a :

$$N(z) = |z|^2 = z\bar{z} = (a+bj)(a+b\bar{j}) = a^2 + 2ab(j+\bar{j}) + b^2 j\bar{j} = a^2 - ab + b^2 \in \mathbb{Z}$$

car $j + \bar{j} = j + j^2 = -1$ et $j\bar{j} = j \times j^2 = j^3 = 1$. Or le module d'un nombre complexe est un nombre positif donc :

$$\boxed{N(z) \in \mathbb{N}}$$

(b) On procède par double implication.

($\Rightarrow$) On suppose que z est un inversible de $\mathbb{Z}[j]$, cela signifie qu'il existe $z' \in \mathbb{Z}[j]$ tel que $zz' = 1$. On note $z = a + bj$ et $z' = c + dj$ avec $(a,b,c,d) \in \mathbb{Z}^4$, on a :

$$N(zz') = |zz'|^2 = |z|^2|z'|^2 = N(z)N(z')$$

Ainsi $N(z)N(z') = N(zz') = N(1) = |1|^2 = 1$. Or $N(z)$ et $N(z')$ sont deux entiers naturels d'après la question précédente donc $N(z) = 1$.

($\Leftarrow$) Réciproquement, on suppose que $N(z) = 1$, on a :

$$N(z) = |z^2| = z\bar{z} = (a+bj)(a+b\bar{j}) = (a+bj)(a+bj^2) = (a+bj)(a-b-bj) = 1$$

Ainsi z est inversible et son inverse est $\underbrace{a-b}_{\in\mathbb{Z}} + \underbrace{(-b)}_{\in\mathbb{Z}}j$.

$$\boxed{z \text{ est inversible si et seulement si } N(z) = 1}$$

(c) D'après la question (b), chercher les inversibles de $\mathbb{Z}[j]$ revient à déterminer les éléments de module 1. Soit $z = a + bj$ avec $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$. En utilisant le calcul de la question (a), on a :

$$N(z) = 1 \Leftrightarrow a^2 - ab + b^2 = 1 \Leftrightarrow a^2 - ab + b^2 - 1 = 0$$

On fixe $b \in \mathbb{Z}$, on obtient alors une équation de degré 2 en a. Le discriminant vaut $\Delta = b^2 - 4(b^2-1) = 4 - 3b^2$. Plusieurs cas sont à considérer :

- Si $|b| \geq 2$, l'équation n'a pas de solution réelle car le discriminant est négatif.
- Si $|b| = 1$ alors si $b = 1$ l'équation a pour solution $a = 0$ et $a = 1$ et si $b = -1$ l'équation a pour solution $a = -1$ et $a = 0$. Ce qui nous donne les inversibles : j, $-j$, $-1-j$ et $1+j$.
- Si $|b| = 0$, c'est-à-dire $b = 0$, on a : $a = 1$ et $a = -1$. Ce qui nous donne les inversibles 1 et -1.

$$\boxed{\mathbb{Z}[j]^\times = \{1, -1, j, -j, 1+j, -1-j\}}$$

Donnons les inverses :

$$1 \times 1 = 1$$
$$(-1) \times (-1) = 1$$
$$j \times (-1-j) = j \times j^2 = j^3 = 1$$
$$-j \times (1+j) = 1$$

(d) L'anneau $\mathbb{Z}[j]$ n'est pas un corps car tous les éléments non nuls ne sont pas inversibles comme nous l'avons vu dans la question précédente.