Exercice 1

Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une fonction continue.

1. Démontrer que pour tout entier naturel non nul n, il existe $a_n \in [0,1]$ tel que $f(a_n) = a_n^n$.
2. On suppose dans cette question que f est décroissante sur $[0,1]$ et on considère la fonction $g_n : x \mapsto f(x) - x^n$ définie sur $[0,1]$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Démontrer que le réel a_n défini à la question précédente est unique.
   (b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ g_{n+1}(a_n) \geq 0$. En déduire que la suite (a_n) est croissante.
   (c) Montrer que la suite (a_n) converge vers une limite $a \in [0,1]$.
3. On considère la fonction f définie par :

$$f \ : \ [0,1] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} x^2 - 2x + \dfrac{3}{4} & \text{si } 0 \leq x \leq \dfrac{1}{2} \\ 0 & \text{si } \dfrac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$$

   (a) Démontrer que f est continue sur $[0,1]$.
   (b) Démontrer que f est décroissante sur $[0,1]$.
   (c) Démontrer que f est à valeurs dans $[0,1]$.
   (d) On considère la suite (a_n) définie dans la question 1. et associée à la fonction f ci-dessus. Démontrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n^n = 0$.
   (e) Démontrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \dfrac{1}{2}$.

Exercice 2

Le but de l'exercice est de déterminer l'ensemble E des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues et distinctes de la fonction nulle telles que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R},\ f(x+y) = f(x)f(y)$$

1. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$, démontrer que la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g \ : \ x \mapsto a^x$ est un élément de E.
2. Soit $f \in E$.
   (a) Démontrer que $f(0) = 1$.
   (b) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \neq 0$.
   (c) Soient $(f,g) \in E^2$, démontrer que fg et $\dfrac{1}{f}$ sont également des éléments de E.
3. Soit $f \in E$. On suppose dans cette question que $f(1) = 1$.
   (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(nx) = f(x)^n$.
   (b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{Z},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(nx) = f(x)^n$.
   (c) Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) > 0$.
   (d) Démontrer que : $\forall r \in \mathbb{Q},\ f(r) = 1$.
   (e) En déduire que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 1$.
4. Soit $f \in E$, on note $f(1) = a$. Déterminer f, on pourra considérer la fonction h définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = \dfrac{f(x)}{a^x}$.
5. Conclure.

Exercice 3

Le but de cet exercice est de déterminer les fonctions continues $g\ :\ [0,1] \to \mathbb{R}$ vérifiant la condition notée $(\mathcal{C})$:

$$\forall (x,y) \in [0,1]^2,\ \frac{1}{2}\Big(g(x)+g(y)\Big) = g\Big(\frac{x+y}{2}\Big) \qquad (\mathcal{C})$$

On note E cet ensemble de fonctions.

1. Soit $f\ :\ [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue qui vérifie les conditions :

$$\begin{cases} f(0) = f(1) = 0 \\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \Big(f(x) = f(y) = 0 \Longrightarrow f\Big(\dfrac{x+y}{2}\Big) = 0\Big) \end{cases}$$

   (a) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall k \in [\![0, 2^n]\!],\ f\Big(\dfrac{k}{2^n}\Big) = 0$.

   (b) Soit $a \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}$, démontrer qu'il existe un unique entier k_n tel que :

$$\frac{k_n}{2^n} \leq a < \frac{1+k_n}{2^n}$$

   (c) Démontrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{k_n}{2^n} = a$. En déduire que $f(a) = 0$. Qu'en déduit-on pour f ?

2. On considère à présent une fonction g, de l'ensemble E.

   (a) Expliciter une fonction affine h qui prend les mêmes valeurs que g en 0 et en 1.

   (b) Démontrer que $f = g - h$ vérifie les conditions de la question 1., en déduire l'ensemble E recherché.