1. Donner les 3 racines 3-ièmes de l'unité.

2. Vrai ou faux : $e^{\frac{7i\pi}{6}}$ est une racine 6-ième de l'unité.

3. Soit $n \geq 2$, démontrer que la somme des racines n-ièmes de l'unité vaut 0.

4-Donner le module et un argument de :

$$z_1 = -\sin(2\theta) + 2i\cos(\theta)^2$$

1. Donner les 3 racines 3-ièmes de l'unité.

Réponse : D'après le cours les racines 3-ièmes de l'unité sont de la forme :

$$z_k = e^{\frac{2ik\pi}{3}} \quad \text{avec } k \in [\![0, 2]\!]$$

C'est-à-dire que k prend les valeurs 0, 1 et 2, ce qui donne :

$$z_0 = 1,\ z_1 = e^{\frac{2i\pi}{3}} \text{ et } z_2 = e^{\frac{4i\pi}{3}}$$

2. Vrai ou faux : $e^{\frac{7i\pi}{6}}$ est une racine 6-ième de l'unité.

Réponse : C'est faux, si on élève ce nombre complexe à la puissance 6, il vient :

$$(e^{\frac{7i\pi}{6}})^6 = e^{7i\pi} = -1$$

Ce n'est pas une racine 6-ième de l'unité.

3. Soit $n \geq 2$, démontrer que la somme des racines n-ièmes de l'unité vaut 0.

Réponse : Voir cours.

4-Donner le module et un argument de :

$$z_1 = -\sin(2\theta) + 2i\cos(\theta)^2$$

Réponse : On a :

$$\begin{aligned} z_1 &= -2\sin(\theta)\cos(\theta) + 2i\cos(\theta)^2 \\ &= 2\cos(\theta)(-\sin(\theta) + i\cos(\theta)) \\ &= 2\cos(\theta)\Big(\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\Big) \\ &= 2\cos(\theta)e^{i(\theta + \frac{\pi}{2})} \end{aligned}$$

Ainsi le module de z_1 vaut $2|\cos(\theta)|$. Pour un argument, il y a 3 cas :

- si $\cos(\theta) = 0$, z_1 n' pas d'argument.
- si $\cos(\theta) > 0$, z_1 a pour argument $\theta + \dfrac{\pi}{2}$.
- si $\cos(\theta) < 0$, z_1 a pour argument $\theta + \dfrac{3\pi}{2}$.