Des anneaux et des oiseaux

Lundi 10 mars 2025, en L101, à 10h23.

Les élèves de MPSI2 sont en train de finir l'AR17-5. Les grandes fenêtres de la salle permettent de contempler le beau ciel bleu d'aujourd'hui. Il y a même une nuée de vanneaux huppés qui volent en formation triangulaire parfaite. Soudain, les oiseaux se séparent en deux groupes de même effectif, eux-mêmes disposés en formation triangulaire parfaite. Tous les étudiants sont stupéfaits et se demandent alors combien il peut y avoir d'oiseaux, sachant qu'à première vue il y en a plus de 100 mais sûrement moins de 1000.

Il faut entendre par "formation triangulaire parfaite" qu'il y a un oiseau en tête de la nuée, suivi de deux oiseaux, suivis de trois oiseaux et ainsi de suite.

1. Dans toute la suite, on note $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2},\ (a,b) \in \mathbb{Z}^2\}$. Pour tout élément $x = a + b\sqrt{2} \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, on appelle norme de x l'entier relatif : $N(x) = a^2 - 2b^2$.
   (a) Montrer que si $x \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, il s'écrit de façon unique sous la forme $x = a + b\sqrt{2}$ où $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$.
   (b) Montrer que $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ muni de l'addition et de la multiplication usuelles est un anneau commutatif et intègre.
   (c) Démontrer que l'application suivante est un automorphisme d'anneau de $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$:
   $$\varphi \quad : \quad a + b\sqrt{2} \quad \mapsto \quad a - b\sqrt{2}$$
   (d) Montrer que N est multiplicative, c'est-à-dire que : $\forall (x,y) \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]^2,\ N(xy) = N(x)N(y)$.
   (e) Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, on a l'équivalence : $x \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]^\times \Leftrightarrow N(x) = \pm 1$.
   (f) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\pm(1 \pm \sqrt{2})^n \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]^\times$. Le but de la question 2 va être de démontrer que tous les éléments inversibles de $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ sont de cette forme.
2. (a) Soient $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$, justifier que si l'un des quatre éléments parmi : $a + b\sqrt{2}$, $a - b\sqrt{2}$, $-a + b\sqrt{2}$ et $-a - b\sqrt{2}$ est inversible alors les trois autres le sont aussi.
   (b) Soient $(a,b) \in \mathbb{N}^2$ tels que $x = a + b\sqrt{2} \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]^\times$.
      i. Justifier que $a \neq 0$.
      ii. Si $b = 0$, déterminer x.
      iii. Si $b \neq 0$, montrer que l'on a : $b \leq a < 2b$.
      iv. Si $b \neq 0$, simplifier $\dfrac{x}{1 + \sqrt{2}}$.
      v. Montrer qu'il existe un entier naturel n tel que $x = (1 + \sqrt{2})^n$. Pour cela, on pourra procéder par récurrence forte sur $a + b$ et utiliser la question précédente.
   (c) En déduire que : $\forall x \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]^\times,\ \exists n \in \mathbb{N},\ x = \pm(1 \pm \sqrt{2})^n$.
3. Revenons à notre problème d'oiseaux. On note N le nombre total de vanneaux huppés.
   (a) Justifier qu'il existe deux entiers naturels l et m tels que : $N = \dfrac{l(l+1)}{2} = m(m+1)$.
   (b) On pose $a = 2l + 1$ et $b = 2m + 1$. Démontrer que $a + b\sqrt{2} \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]^\times$.
   (c) En déduire qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $a + b\sqrt{2} = (1 + \sqrt{2})^n$. On note (a_n, b_n) l'unique couple d'entiers naturels tel que $(1 + \sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2}$.
   (d) Démontrer que les suites (a_n) et (b_n) sont définies par les relations de récurrence :
   $$\begin{cases} a_0 = 1,\ b_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = a_n + 2b_n \\ \forall n \in \mathbb{N},\ b_{n+1} = a_n + b_n \end{cases}$$
   (e) En développant $(1 + \sqrt{2})^n$ pour les premières valeurs de n, trouver le nombre d'oiseaux.
   (f) Enfin, les oiseaux se séparent en 5 groupes de même effectif. Quelle est la grande réponse du DM, de l'univers et du reste ? Quel est le rapport avec la date du jour ?

La grande majorité des résultats présentés dans ce problème sont également valables pour d'autres races d'oiseaux comme les oies rieuses, les cygnes chanteurs et presque tous les canards.